De x-schaal

H.J. van Dooren

Drogreden

Er zijn talrijke boeken geschreven onder de noemer ‘wiskundige’ puzzels. De puzzels zijn in verschillende categorieën onder te verdelen. Een bekende constructie is, dat de puzzel begint met een stelling die wordt gevolgd door een vraag. De stelling suggereert correcte informatie te geven, maar is vaak een drogreden. De meesten van ons kennen wel een paar voorbeelden.
Ik moest daar aan denken bij het lezen van de vraag, aan IJzebrand gesteld (MIR 19), met betrekking tot het berekenen van de logaritmische lijn. Uit de tekst maak ik op, dat niet de lijn wordt bedoeld die bij een grafische voorstelling van een exponentionele functie behoort, maar een logaritmische schaalverdeling.

Schaalverdeling

Een willekeurige student techniek tekent op verzoek zonder moeite op een bierviltje een lineaire- of een logaritmische schaal:

S In de *lineaire* schaal herkent de doorsnee mens een soort ‘centimeter-schaal’ aan de verdeling in gelijke stukken, en de bijgeschreven cijfers welke met één oplopen.

S De *logaritmische* schaal is herkenbaar doordat gelijke stukjes een macht van een bepaald getal laten zien.

Niemand vraagt zich bij het zien van een lineaire schaal af, of deze gebaseerd is op meters of op Rijnlandse voeten. Immers, voor een timmerman is het slechts van belang dat hij met de gemeten afstand op zijn stok bij de klant thuis, een passende deur kan maken in zijn werkplaats. Ook bij een rekenliniaal is het in principe niet belangrijk welke schaalmaat is genomen. In dit geval is het slechts de bedoeling dat er, door het achter elkaar leggen van twee schalen, door optellen het resultaat van een vermenigvuldiging kan worden verkregen.

Grafisch optellen

Neem twee willekeurige *lineaire* en identieke schalen. Om te kunnen optellen, worden de twee getallen als delen van de schaal achter/boven elkaar gelegd. De totale lengte is de som van de twee getallen.

Bij de lengte 3 (bovenste schaal) wordt 4 (onderste schaal) opgeteld. De totale lengte wordt op de bovenste schaal afgelezen => 7.

voorbeeld 1, som van twee getallen: 3 + 4 = 7

```
0       1       2       3       4       5       6       7       8       9       10
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----
                        0       1       2       3       4       5       6       7       8       9       10
                        |-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----
```

Grafisch vermenigvuldigen

Om te kunnen vermenigvuldigen worden twee willekeurige *logaritmische* en identieke schalen gebruikt.

De twee de te vermenigvuldigen getallen worden evenals hierboven als lengtes achter elkaar gelegd. De totale lengte is het product van de twee getallen.

voorbeeld 2, product van twee getallen, (met schalen van de macht van 10): 1 000 x 100 = 100 000

```
1       10      100     1000    10000   100000
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----
                        1       10      100     1000    10000   100000
                        |-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----
```

Ook hier wordt de ‘lengte’ 1000 (bovenste schaal) opgeteld bij de ‘lengte’ 100 (onderste schaal) en het resultaat weer op de bovenste schaal afgelezen => 100 000

Merk op: Een logaritmische schaal kent niet de waarde nul.

Voorbeeld 3, product van twee getallen, (met schalen van de macht van 2): 8 x 64 = 512

```
1       2       4       8       16      32      64      128     256     512     1024
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----
                        1       2       4       8       16      32      64      128     256     512     1024
                        |-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----
```

De met één oplopende schaal
Bij de hierboven gegeven voorbeelden 2 en 3 ontstaat het probleem bij het vaststellen van de plaats van de tussenliggende streepjes. We willen graag een schaal waarbij we onmiddellijk de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, enz. kunnen instellen. Want, omdat de schaal niet lineair verloopt, is schatten van de tussenliggende waarden moeilijk.
Om de juiste plaats te bepalen kunnen we proefondervindelijk te werk gaan, maar er is een betere manier. Daarvoor eerst een tussenstap.

De logaritme van een getal
Hoe is het ook alweer? De logaritme van een getal *y* voor het grondtal *g* gesymboliseerd door: ${}^{g}\log y$, is de exponent (x) van de macht waartoe men *g* moet verheffen om *y* te verkrijgen.
Minder ingewikkeld is het om de formule te bekijken:

$${}^{g}\log y = x \quad \text{hoort bij:} \quad g^{x} = y$$

De laatste vergelijking is de inverse van de eerste. De exponentionele functie $g^x = y$ levert de volgende tabel op (e = 2,71828):

voor:	$g = 2$	$g = e$	$g = 3$	$g = 4$
x	y	y	y	y
0	1	1	1	1
1	2	2,72	3	4
2	4	7,39	9	16
3	8	20,89	27	64
4	16	54,60	81	256

De x-schaal
Hoe komt nu de ‘eerste’ schaal tot stand? De meest eenvoudige methode lijkt dan de grafische, waarbij we gebruik maken van de gegevens uit de tabel.
Hierna is de grafiek van de functie $y = g^x$ getekend met - om een ‘mooi’ verloop te krijgen

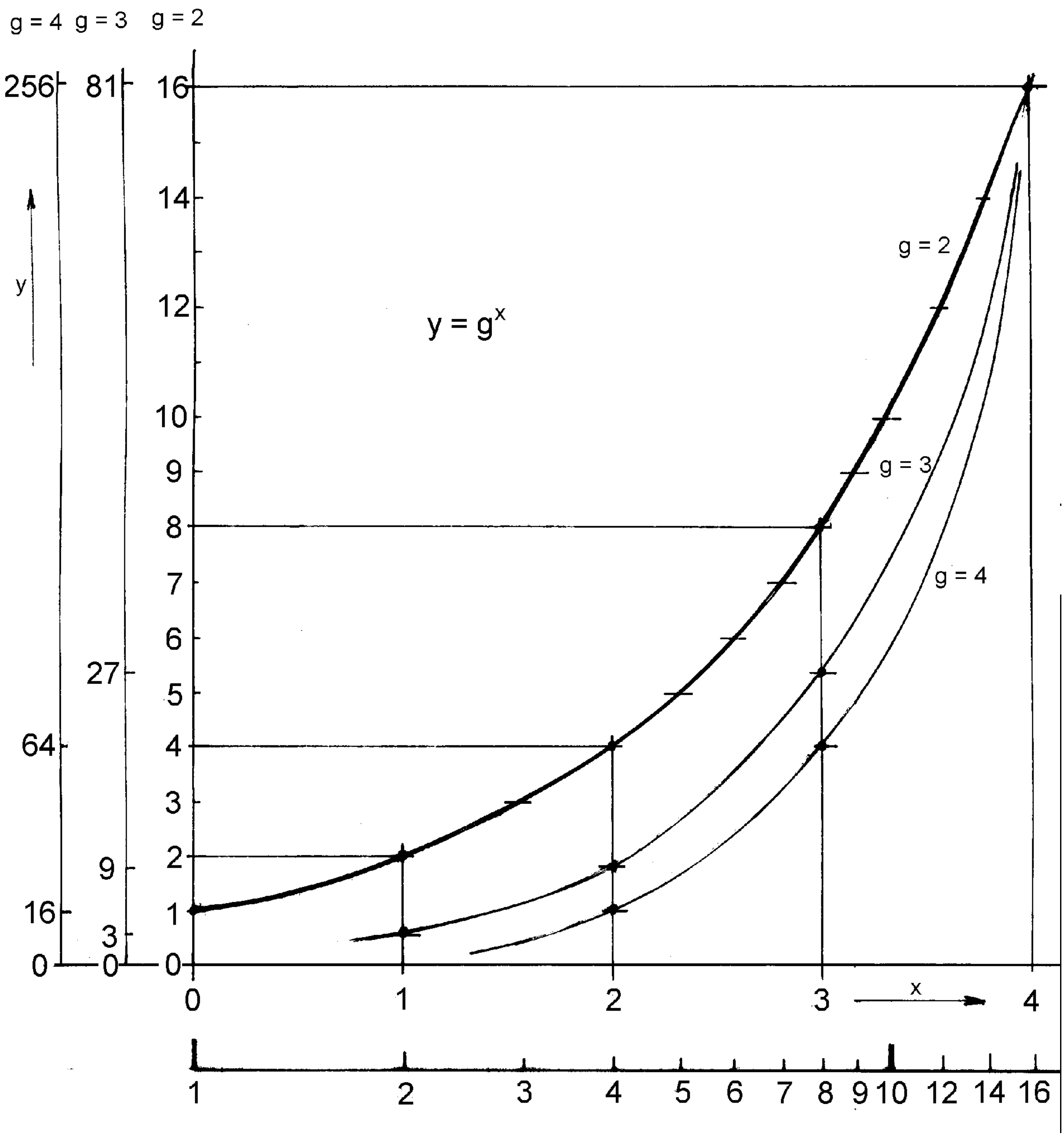
- een schaalverhouding van:
  y / 37,6mm* en
  x / 10mm (voor $g = 2$),
  x = 1,975mm (voor $g = 3$),
  x = 0,625mm (voor $g = 4$).
(De lijn voor g = e ligt tussen die van $g = 2$ en $g = 3$ in, maar is weggelaten)

Te zien is dat op de x-as behalve de waarde van *x*, ook de via de grafische lijn overgenomen waarde van *y* is uitgezet. De lijn die zo ontstaat komt overeen met een x-schaal van een 12^5-cm lat of een halve x^2-schaal van een 25-cm lat (waarbij de onnauwkeurigheid in de hier afgebeelde grafiek is ontstaan door het kopiëren).

Het blijkt dat in dit geval de lijn die ontstaat met het grondtal 2 het best afleesbare resultaat geeft.

* De juiste afstand voor een 125mm-schaal is:
(log2 - log1) : (log10 - log1) x 125mm
= 37,628749458mm

Het verloop van de lijn $y = g^x$



Andere manier
Als we beschikken over een rekenliniaal (!), logaritmetafel of rekenmachine, kan de schaallengte voor een 25cm-liniaal worden berekend met log *x* x 250mm. De hierna volgende tabel geeft de afstanden. Overigens is deze berekening gemaakt binnen het tekstverwerkingsprogramma WP7.

log 1	0 x 250mm	0mm
log 2	0,30102999566 x 250mm	75,26mm
log 3	0,47712125472 x 250mm	119,28mm
log 4	0,60205999133 x 250mm	150,51mm
log 5	0,69897000434 x 250mm	174,74mm

log 6	0,77815125038 x 250mm	194,54mm
log 7	0,84509804001 x 250mm	211,27mm
log 8	0,90308998699 x 250mm	225,77mm
log 9	0,95424250944 x 250mm	238,56mm
log 10	1 x 250mm	250,00mm

Log- of ln-schaal?
Vanwaar de verwarring met betrekking tot de log- dan wel de ln-schaal? Voor de *vorm* van de schaal maakt het niet uit - bewezen door bovenstaande grafiek - welk grondtal wordt gebruikt. Het is niet onwaarschijnlijk dat de meeste mensen met een bescheiden wiskundige achtergrond, bij logaritmen meteen aan die met het grondtal 10 denken, de Briggse logaritmen. De log-schaal (schaal L verloopt lineair!) die nog het meest op rekenlinialen voorkomt, versterkt mogelijk dat idee.

De praktijk
Een rekenlinialenfabrikant streeft - uiteraard - naar de hoogst mogenlijke nauwkeurigheid van zijn schalen en de hanteerbaarheid van het instrument. In principe neemt de nauwkeurigheid toe met de lengte van de schaal. Bij ‘stokken’ blijkt een schaallengte van 25 cm een aanvaardbaar compromis te zijn. Bij een ervaren gebruiker is de afwijking na 5 bewegingen minder dan 1%. Zeker in de techniek, waar men soms hoge veiligheidsmarges aanneemt, ruim voldoende.

Standaard lengte
Ten slotte de vraag hoe lang een standaardliniaal moet zijn om er goed mee te kunnen werken. Wat is goed werken? Een definitie van ‘goed’ werken met de rekenliniaal zou kunnen zijn: Het met aanvaardbare nauwkeurigheid snel en gemakkelijk een berekening kunnen maken. Hiervoor is al aangegeven dat een bepaalde rekenliniaal een compromis is tussen hanteerbaarheid en nauwkeurigheid (= lengte) van de schaal. Om de schaallengte op te kunnen voeren kiest men voor een langere lat, tot ca. 1m, een schijfvorm met spiraalvormige schaal of een cilinder. Bij een schaallengte 40x 25cm of 10m is de onnauwkeurigheid minder dan 0,02% (na 5 achtereenvolgende bewerkingen). Als zakliniaal is zo’n stok niet zo geschikt. Dat is de reden dat - voor bureau-doeleinden - met name Loga deze lengte in stukken heeft aangebracht op een cilinder.

Nieuwe vragen
Het voorgaande roept nieuwe vragen op. Er zijn/waren rechte linialen in de handel in lengtes van 10cm tot 1,50m.

1. Welke firma heeft als eerste de tot standaard verheven 25-cm schaal in de handel gebracht?
2. Denkend aan de Engelse inbreng bij het ontwerpen van rekenlinialen:
   Waarom een lengte van 250mm en niet van bijvoorbeeld 10" of 12"?