DE LOGARITME VAN JOHN NAPIER S.A.M. van der Salm

1. Inleiding

De meeste ontdekkingen die in de wiskunde worden gedaan, zijn een (tijdelijk) eindpunt van een lange serie, eerder gedane, ontdekkingen. Zelfs *Newton*, die zeker niet bekend stond als een bescheiden wetenschapper, verklaarde eens in een nederige stemming: “Ik kon belangrijke ontdekkingen doen omdat ik op de schouders van grote voorgangers kon staan en daarom iets verder kon kijken”.
De ontdekking van de *logaritmen* door de amateur-wiskundige *John Napier* (1550-1617) is te zien als het beginpunt van een indrukwekkende ontwikkeling van intelligente rekentechnieken. Napier bedacht zijn logaritmen, nagenoeg onafhankelijk van andere wetenschappers in het toenmalige mathematische onderzoek. De vondst van Napier kan daarom nauwelijks worden beschouwd als het tijdelijke eindpunt van een bepaalde ontwikkeling in de wiskunde.
Bij het doen van zo’n uitspraak moeten we vanzelfsprekend de nodige voorzichtigheid betrachten. Nadat een bepaalde ontdekking in de wiskunde of een andere wetenschap is gedaan, kunnen we altijd wel plausibele, wetenschap-historische verklaringen vinden, waarom de tijd, voor het doen van die specifieke ontdekking, “rijp” was.
De volgende opmerking bevat zeker een kern van waarheid :
"Als geleerde X ontdekking Z niet gedaan zou hebben op tijdstip T, dan zou geleerde Y die ontdekking wel hebben gedaan op een ander tijdstip dat dicht bij T is gelegen".
We kunnen enig bewijs voor deze stelling vinden in het feit dat dikwijls, vlak na elkaar, meerdere wetenschappers, onafhankelijk van elkaar, een specifieke ontdekking doen. Hieruit volgen vaak prioriteitskwesties, waarvan de langdurige strijd tussen Newton en *Leibniz*, met betrekking tot de vraag wie de eer toekwam als eerste de differentiaal- en integraalrekening te hebben ontdekt, een fraaie illustratie is. Wetenschappers, die zich met de historie van de wetenschap bezighouden, zijn echter van mening dat Newton en Leibniz onafhankelijk van elkaar, maar min of meer gelijktijdig, op het idee van deze rekenmethode kwamen.
We doen er dus goed aan om de ontdekking van de logaritmen door Napier niet volledig onafhankelijk te zien van de ontwikkelingen in de toenmalige wiskunde en natuurwetenschap. Niettemin komt Napier de eer toe een geniale ontdekking te hebben gedaan, een ontdekking waarvoor de tijd zeker nog niet “rijp” was.
John Napier bedacht ook het woord *logaritme*. Logaritme is een samenvoeging van de Griekse woorden *logos*, en *arithmos*, die respectievelijk *rede* en *getal* betekenen. Logaritmen zijn, aldus Napier, *redelijke getallen*.

2. Wiskunde vóór 1500

Om de stand van de wiskunde in de tijd van Napier enigszins te kunnen beschrijven, nemen we het jaar 1500 als uitgangspunt.
In het jaar 1500 kwam de kennis van wiskunde en natuurwetenschap in Europa ongeveer overeen met de kennis van wiskunde en natuurwetenschap in de klassieke oudheid.
Wiskundigen bestudeerden voornamelijk het werk van Apollonius, Archimedes, Euclides, Ptolemaeus en ander geleerden die in de oudheid leefden. In de middeleeuwen waren elders, door Hindoes en Arabieren, wel belangrijke en fundamentele wiskundige ontdekkingen gedaan, maar deze drongen slechts zeer langzaam door tot het wetenschappelijke milieu van Europa. De eerste bijdragen van Europese wiskundigen lagen vooral op het terrein van de trigoniometrie en de boldriehoekmeetkunde. Deze bijdragen waren vaak het gevolg van het oplossen van navigatieproblemen of sterrenkundige vraagstukken.
Het grootste deel van de toenmalige, dus vooral klassieke, wiskunde was *meetkundig* van aard. Heel veel van de wiskunde, die bijvoorbeeld in de jaren tussen 1500 en 1900 is gevonden, is ook geometrisch van aard, maar we zien het gewicht van algebraïsche aspecten steeds meer toenemen.
Het overwegend meetkundige karakter van de klassieke wiskunde kwam nog tot uitdrukking in de wiskunde die vóór 1968 op middelbare scholen werd onderwezen. Vergeleken met de jaren erna, werd vóór 1968 veel aandacht besteed aan meetkundige vakken, zoals Euclidische meetkunde, stereometrie, projectieve meetkunde en beschrijvende meetkunde. Algebra kwam weliswaar uitvoerig aan de orde, maar voor een vak als analyse had men in het schoolonderwijs nog relatief weinig oog.
In de jaren zestig was er een gevleugelde uitspraak te horen uit de monden van de vernieuwers van het wiskunde-onderwijs: “ A bas Euclides” (= Weg met Euclides), zo schoon genoeg had men van de, naar men meende, ouderwetse en veel te gewichtige rol die de meetkunde in het onderwijs speelde. Men duidde daarmee in de eerste plaats op de uitvoerige, deductieve behandeling van de Euclidische meetkunde in het schoolonderwijs. Eeuwenlang vormde die Euclidische meetkunde de eerste, en belangrijkste, kennismaking van scholieren met de wiskunde.
Veel van de modernere ontwikkelingen in de wiskunde, met name in de algebra, analyse, vectorrekening, logica en verzamelingenleer, waren tot de jaren zestig grotendeels aan het schoolonderwijs voorbijgegaan. Daarom vonden de vernieuwers van het wiskunde-onderwijs dat het tijd was geworden om bepaalde elementen van de modernere wiskunde in het schoolonderwijs in te voeren en de, in hun ogen ouderwetse, meetkunde te laten verdwijnen. Pas de laatste jaren realiseren de ontwikkelaars van het wiskunde-curriculum voor de middelbare school zich gelukkig weer, dat onderricht in de meetkunde, als onderdeel van het wiskunde-onderwijs, toch onontbeerlijk is.

Natuurlijk was niet alle wiskunde voor 1500 meetkundig van aard. Door significante ontdekkingen van de *Arabieren* in de middeleeuwen begon langzaam maar zeker de *algebra* (een woord van Arabische oorsprong) zich te ontwikkelen. Vóór 1500 gebruikten wiskundigen nauwelijks formules. Ze gebruikten gewone, dagelijkse taal bij het beschrijven van de eigenschappen van wiskundige objecten en hun onderlinge relaties. Het ontbreken van een efficiënte en functionele algebraïsche notatie stond nieuwe ontwikkelingen in de wiskunde en de daarop steunende natuurwetenschap in de weg. Immers, handige algebraïsche notaties verduidelijken en vereenvoudigen het beschrijven van wiskundige objecten en hebben bovendien in bepaalde mate een *zelfdenkend* effect. Dat wil zeggen, dat veel algebraïsche formuleringen *algoritmisch* (ook een woord van Arabische oorsprong) kunnen worden bewerkt, zodat een gewenst of juist onverwacht resultaat wordt bereikt. Door deze onverwachte resultaten kunnen algebraïsche formules ook weer tot nieuwe wiskunde aanleiding geven.
Eén van de belangrijkste ontdekkingen, die in de middeleeuwen door de *Hindoes* werd gedaan, was de ontdekking dat natuurlijke getallen kunnen worden voorgesteld in een *positiestelsel*. Het decimale stelsel is het bekendste voorbeeld van zo'n plaatswaardenstelsel. Het binaire stelsel is een ander, tegenwoordig door ontwikkelingen in de digitale techniek zeer bekend, voorbeeld.

Zonder dat we er meestal bij stilstaan worden decimaal voorgestelde natuurlijke getallen gerepresenteerd door een algebraïsche formule:

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot 10^i \qquad (2.1)$$

Het natuurlijke getal x wordt dus voorgesteld door middel van n decimale cijfers x_i
Vanzelfsprekend bestond deze notatie in de middeleeuwen nog niet. Men gebruikte veel primitievere notaties, maar het idee van een getal als som van bepaalde machten van een grondtal was geboren. Alhoewel het niet onmogelijk is om de bovenstaande formule te verduidelijken met behulp van meetkundige figuren, is zo'n geometrische verduidelijking niet noodzakelijk voor het juiste begrip van de gehanteerde notatie.
De decimale notatie voor getallen duidt, evenals vele andere voorbeelden die we zouden kunnen noemen, op een toename in abstractie in het wiskundige denken. We zien dat men, te beginnen in de middeleeuwen, steeds meer gaat wennen aan een abstractere, formule-matige, beschrijving van wiskundige objecten.
In de dertiende en viertiende eeuw gingen bankiers, handelaren, architecten en ingenieurs in de opkomende Italiaanse handelsteden steeds meer rekenen met decimale getallen. Door onder andere het sterk toenemende handelsverkeer werd het noodzakelijk dat allerlei praktische problemen, betreffende boekhouding, navigatie, sterrenkunde, landmeting en logistiek, werden opgelost. Een voorbeeld van zo'n praktisch, schijnbaar onbelangrijk en oninteressant probleem is het berekenen van *samengestelde interest*. Als gevolg hiervan werden langzamerhand algebra (=stelkunde) en praktische rekenkunde, naast de klassieke meetkunde, hoofdbestanddelen van het wiskundige menu dat men Italiaanse en ook iets later andere Europese scholieren en studenten aanbood.
De oplossing van veel van die praktische problemen heeft geleid tot een enorme toename van de wiskundige, natuurkundige en technische kennis en inzichten. Langzamerhand zien we ook de manier waarop die kennis werd beschreven veranderen. Zo zien we in de eerste helft van de zestiende eeuw wiskundige formuleringen ontstaan in een notatie die weliswaar nog afweek van de huidige, maar er toch wel mee verwant was. Ook in de Nederlanden leverden wetenschappers en ingenieurs, vanaf de tweede helft van de zestiende eeuw, belangrijke bijdragen aan de ontwikkeling van de wiskunde. Een bekende figuur in dit verband is *Simon Stevin*, een ingenieur in het leger van prins Maurits. Naast allerlei technische uitvindingen, zijn belangrijke verbeteringen van een aantal rekenmethodes, die het rekenen met decimale getallen betreffen, van zijn hand.

3. John Napier (1550-1617)

John Napier werd in 1550 geboren in Merchiston Castle, Edinburgh, Schotland, als zoon van een belangrijk Schots grootgrondbezitter. Wiskunde was voor Napier niet meer dan een aangename hobby met nuttige praktische kanten. Naast het beheren van de van zijn vader geërfde landgoederen, hield Napier zich voornamelijk bezig met het in woord en geschrift bestrijden van Katholieken in het algemeen en de toenmalige paus in het bijzonder. Verbazingwekkend is dus dat hij voldoende tijd overhad voor het doen van een aantal bijzondere mathematische ontdekkingen. We vinden diverse bijdragen van Napier in de boldriehoekmeting (de formules van Napier); Napier bedacht de zogenaamde *botten van Napier* (Napier's bones), rekenstaafjes waarmee algoritmisch gerekend kon worden; en Napier bedacht de nog steeds in gebruik zijnde decimale notatie van fracties (de decimale punt of komma, waarachter cijfers staan die moeten worden vermenigvuldigd met machten van 10 met negatieve exponent). Maar de belangrijkste vinding van Napier, met verstrekkende gevolgen voor het verloop van rekenprocessen gedurende de komende drie en halve eeuw, was de ontdekking van de l*ogaritmen* rond het jaar 1600. Voor de jongere lezers van dit artikel, die van kleins af aan hebben leren werken met een elektronische rekenmachine, is bijna niet meer te begrijpen waarom de ontdekking van de logaritme van zo'n groot belang was, maar de ouderen, die nog hebben leren werken met *rekenliniaal* en *tabellenboek*, weten ongetwijfeld nog het grote belang van deze ontdekking te waarderen. Ze weten nog dat, zonder het gebruik van logaritmen, heel veel rekenwerk zeer geestdodend, foutgevoelig en vooral tijdrovend is. In de tijd van Napier moesten met name sterrenkundigen heel veel rekenwerk verrichten. Door de logaritmen van Napier werd dat astronomische rekenwerk aanzienlijk verlicht. Vandaar de volgende, aan *Laplace* toegeschreven, in het Engels vertaalde, uitspraak:

By shortening the labours in computation, Napier doubled the life of the astronomer.

4. Logaritmen

Tegenwoordig zijn we zo gewend aan het rekenen met machten met een *vast grondtal*, dat we ons nauwelijks kunnen voorstellen dat het eeuwen heeft geduurd voordat men op het idee van zulke machten kwam. In de tijd van Napier onderzocht men wel bepaalde relaties tussen *rekenkundige* en *meetkundige* reeksen, die in verband met logaritmen van belang zijn, maar de algebra was toen nog lang niet zover ontwikkeld dat dit onderzoek tot bruikbare resultaten kon leiden.

Het simpele idee dat de logaritme y van een positief getal x de exponent van een grondtal is, was in de tijd van Napier nog onbekend. Met andere woorden, de volgende betrekking, geformuleerd in hedendaagse wiskundige schrijfwijze, was nog onbekend:

$$x = g^{y} \Leftrightarrow y = {}^{g}\log(x) \qquad (4.$$

Niettemin ontdekte Napier de belangrijke *hoofdeigenschap* van logaritmen, namelijk de eigenschap die zegt dat de logaritme van een product de som is van de logaritmen van de factoren waaruit dat product bestaat. Tegenwoordig zouden we die hoofdeigenschap van de logaritmen met grondtal g als volgt formuleren:

$$x_1 = g^{y_1}, x_2 = g^{y_2} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = g^{(y_1+y_2)} \qquad (4.2)$$

Equivalent met deze formulering is:

$${}^{g}\log(x_1 \cdot x_2) = {}^{g}\log(x_1) + {}^{g}\log(x_2) \qquad (4.3)$$

(Strikt genomen voldoet de logaritme van Napier, die *niet* equivalent is met de natuurlijke logaritme, niet helemaal aan deze hoofdeigenschap, zoals we verderop zullen zien.)

Napier beschouwde zijn logaritme echter niet als een exponent voor een specifiek grondtal, zoals wij dat tegenwoordig doen. In de tijd dat Napier zijn logaritme ontdekte, was de algebra nog lang niet zover ontwikkeld, dat het in onze ogen zo eenvoudige inzicht, van een logaritme als exponent van een grondtal, kon ontstaan. Napier dacht bij logaritmen daarentegen in termen van een fraaie analogie uit de mechanica.

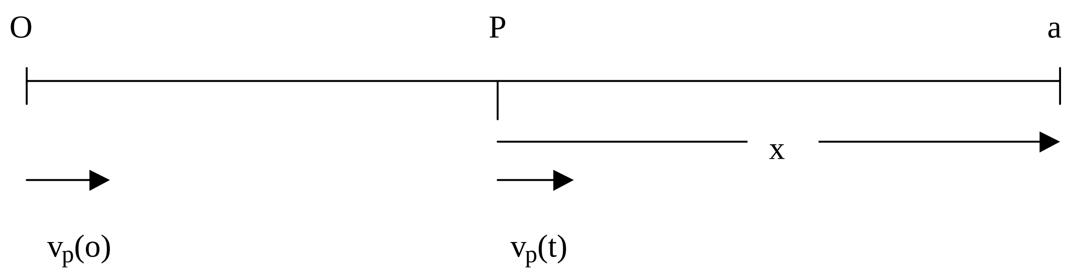
Een internet-publicatie van de St.Andrews University in Schotland, de universiteit waar Napier enige tijd studeerde, beschrijft in een paar regels het idee dat tot de logaritme van Napier leidde. (De URL van deze publicatie wordt aan het einde van dit artikel vermeld)

Het vervolg van mijn artikel geeft een wiskundige uitwerking van dit idee, in mathematische termen die veel later dan het jaar 1600 voor het eerst werden geformuleerd, en dus niet bekend waren bij Napier.

Iemand die de hierna volgende berekening stap voor stap doorloopt, zal met stijgende bewondering de vondst van Napier bezien. Immers niets, of zo goed als niets, van de tegenwoordig tamelijk elementaire wiskunde die voor de berekening benodigd is, was bekend in de tijd van Napier. Dit feit kan de prestatie van Napier in onze ogen alleen maar groter maken en het getuigt bovendien van het geniale inzicht dat Napier moet hebben gehad in de eigenschappen van getallen en vooral in belangrijke relaties tussen getallen.

5. De logaritme van Napier

Bij het afleiden van de formule voor de logarime van Napier beginnen we met een lijnstuk Oa, waarvan de lengte a is. Dus a>0. Een punt P begint in de oorsprong O met beginsnelheid $v_p(0)$ te bewegen in de richting van eindpunt a.



figuur 5.1

Op het tijdstip t is de snelheid van punt P gelijk aan $v_p(t)$. Zie figuur 5.1.

De plaats van punt P op het moment t noemen we p(t); het resterende stuk van het lijnstuk Oa noemen we x(t).

Kennelijk geldt er:

$$x(t) = a - p(t) \quad [\mathrm{m}] \tag{5.1}$$

De snelheid van punt P kiest Napier evenredig met de resterende afstand x:

$$v_p(t) = \alpha \cdot x(t) = \alpha \cdot (a - p(t)) \quad [\mathrm{m/s}] \tag{5.2}$$

We kunnen nu stellen:

$$v_p(t) = \alpha \cdot (a - \int_0^t v_p(t)dt) \quad [\mathrm{m/s}] \tag{5.3}$$

Na differentiëren vinden we:

$$\frac{dv_p(t)}{dt} = -\alpha \cdot v_p(t)] \quad [\mathrm{m/s^2}] \tag{5.4}$$

De oplossing van deze elementaire vergelijking is:

$$v_p(t) = \beta \cdot e^{-\alpha t} \quad [\mathrm{m/s}] \tag{5.5}$$

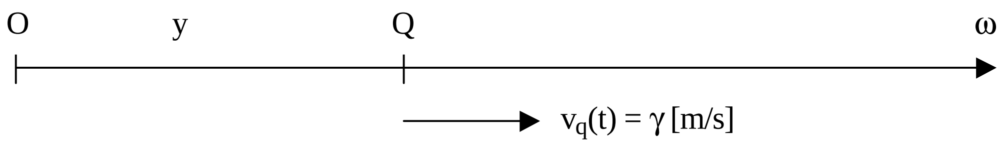
Aangezien:

$$v_p(0) = \alpha \cdot a \quad \text{is} \quad \beta = \alpha \cdot a \quad [\mathrm{m/s}] \tag{5.6}$$

en volgt er:

$$v_p(t) = \alpha \cdot ae^{-\alpha t} \quad [\mathrm{m/s}] \tag{5.7}$$

Vervolgens beschouwen we een naar rechts oneindige lijn Oω. Zie figuur 5.2.



figuur 5.2

Op t = 0 begint punt Q zich over deze lijn naar rechts te bewegen met een constante snelheid van γ [m/s]. Er geldt dus:

$$v_q(0) = \gamma \quad [\mathrm{m/s}] \tag{5.8}$$

We veronderstellen dat de beginsnelheden van de punten P en Q gelijk zijn:

$$v_p(0) = \alpha \cdot a = v_q(0) = \gamma \quad [\mathrm{m/s}] \tag{5.9}$$

De afstand die punt Q op het moment t heeft afgelegd, noemen we y(t).
Hieruit volgt:

$$y(t) = \gamma \cdot t = \alpha \cdot at \quad [\mathrm{m}] \tag{5.10}$$

$$t = \frac{y(t)}{\alpha \cdot a} \quad [\mathrm{s}] \tag{5.11}$$

Uit formule 5.2 kunnen we afleiden:

$$x(t) = \frac{v_p(t)}{\alpha} = ae^{-\alpha t} \quad [\mathrm{m}] \tag{5.12}$$

Door formule 5.11 in te vullen in formule 5.12 bereiken we het volgende resultaat:

$$x(t) = ae^{-y(t)/a} \quad [\mathrm{m}] \tag{5.13}$$

Op ieder moment t wordt de relatie tussen x en y dus gegeven door de volgende relatie:

$$x = ae^{-y/a} \quad [\mathrm{m}] \tag{5.14}$$

Voor de waarde x geldt: $0 \le x \le a$

Wordt de relatie tussen x en y beschreven door formule 5.14, dan noemen we y de *Napier-logaritme* van x:

$$y = \mathrm{NapLog}(x) \qquad (5.15)$$

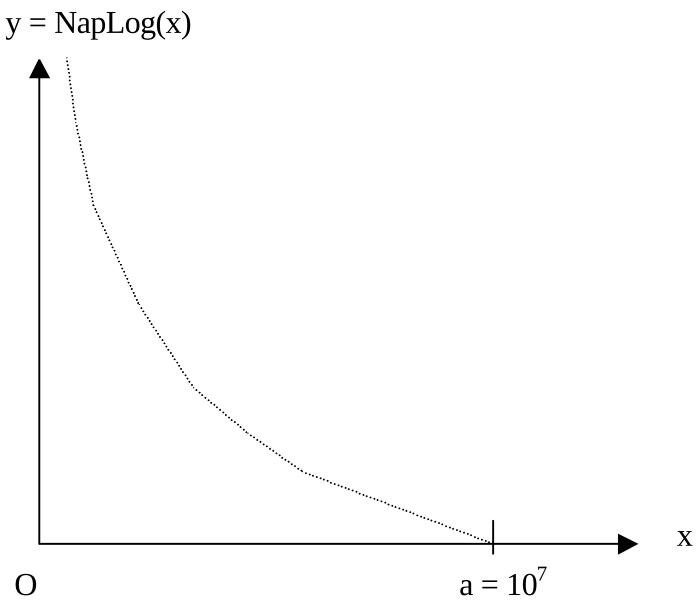
We zien dus dat de Napier-logaritme niet identiek is met de natuurlijke logaritme, zoals wel vaak wordt gemeend. Gezien formule 5.14 bestaat er wel verband tussen de Napier-logaritme en de natuurlijke logaritme. Dit verband kunnen we gemakkelijk uit formule 5.14 afleiden:

$$\mathrm{NapLog}(x) = a \cdot (\ln(a) - \ln(x)), \quad \text{waarin } \ln(x) = \int_1^x \frac{du}{u} \qquad (5.16)$$

Napier koos de waarde van a, dus de lengte van het lijnstuk in de eerste figuur, gelijk aan 10^7. Deze merkwaardige keuze was gebaseerd op het feit dat de nauwkeurigste goniometrische tafels voor sin(X) die hem bekend waren, sin(X) gaven in 7 decimalen.
Napier stelde daarom:

$$x = 10^7\,X \qquad (5.17)$$

De volgende figuur laat de grafiek van y = NapLog(x) zien.



figuur 5.3

De logaritme van Napier heeft de onhandige eigenschap dat de logaritme van een product niet helemaal gelijk is aan de som van de logaritmen van de factoren waaruit dat product bestaat.
We kunnen dat inzien als we als volgt te werk gaan:

Stellen we:

$$y_1 = \mathrm{NapLog}(x_1) \quad \text{en} \quad y_2 = \mathrm{NapLog}(x_2) \qquad (5.18)$$

dus:

$$x_1 = ae^{-y_1/a} \quad \text{en} \quad x_2 = ae^{-y_2/a} \qquad (5.19)$$

en stellen we:

$$x = ae^{-(y_1+y_2)/a} \qquad (5.20)$$

dan vinden we:

$$x = x_1 \cdot x_2 \cdot \frac{1}{a} \qquad (5.21)$$

Hieruit volgt de enigszins onhandige formule:

$$\mathrm{NapLog}\left(\frac{x_1 \cdot x_2}{a}\right) = \mathrm{NapLog}(x_1) + \mathrm{NapLog}(x_2) \qquad (5.22)$$

Uit deze formule, die Napier zeker niet in deze vorm kende, zien wij, met onze huidige kennis van mathematische formules, onmiddellijk dat de keuze voor een andere waarde dan 1 voor a onhandig is. Hier wordt duidelijk geïllustreerd hoe belangrijk het kan zijn om te beschikken over effectieve wiskundige formules.

De suggestie om voor a de waarde 1 te kiezen, kwam van de wiskundige *Henry Briggs (1561-1630)*, ongeveer in het jaar 1615.
Stellen we voor a in formule 5.16 de waarde 1, dan vinden we:

$$\mathrm{NapLog}(x) = -\ln(x) \qquad (5.23)$$

We moeten ons bij het zien van deze formule, die een frappant verband tussen de logaritme van Napier en de natuurlijke logaritme laat zien, goed realiseren, dat in de tijd van Napier het begrip natuurlijke logaritme nog volstrekt onbekend was.
Ook het grondtal e, dat in veel van de bovenstaande formules wordt gebruikt, was in de tijd van Napier niet bekend.

Maar het idee van een logaritme als exponent van een grondtal was niettemin geboren. Henry Briggs introduceerde de logaritmen met grondtal 10 en hij spendeerde zeer veel tijd in het produceren van de eerste bruikbare logaritmetabellen.

Literatuur:

1. D.J. Struik: Geschiedenis van de Wiskunde
2. J. McLeish: Het getal, van kleitablet tot computer
3. Internet-publicatie: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Napier.html