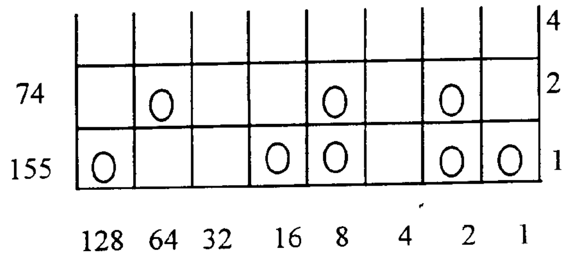
RABDOLOGIA, deel 4

Jo Donners

Behalve naar mijn verzameling van op logaritme gebaseerd rekentuig gaat mijn interesse ook uit naar de geschiedenis / ontwikkeling van het rekenen (+, -, x, :, %) - vanaf de Egyptenaren tot aan deze eeuw - en de hulpmiddelen die daarbij gebruikt werden.
John Napier berekende zijn '*Mirifici Logarithmorem Canonis Descriptio*' met behulp van zijn *bones* of staafjes.
In de veronderstelling dat het vermenigvuldigen en delen met behulp van deze staafjes bekend was, heb ik in MIR 15 alleen het trekken van de tweede- en derdemachtswortel uitgelegd.
Het gebruik van de staafjes beschreef Napier in zijn boekje 'RABDOLOGIA' waarin nog twee andere hulpmiddelen uit de doeken werden gedaan, onder andere het onderwerp van dit artikel, het

LOCATION ARITHMETIC AS PERFORMED ON A CHESSBOARD

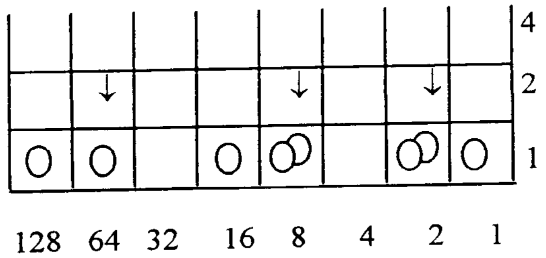


figuur 1: optelling 74 + 155, eerste stap

Voor het werken hiermee, kunnen we voor kleine getallen een schaak- of dambord gebruiken met schijven, voor grotere getallen is het bord uit te breiden tot zo groot als nodig is. (Napier gebruikte in zijn voorbeelden een bord met 24 x 24 velden!).
Benoem de horizontale en verticale velden met de binaire reeks 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, enz. met rechtsonder de 1 (zie fig. 1).
Willen we twee getallen b.v. 74 en 155 *optellen*, dan ontleden we eerst beide getallen binair als volgt:

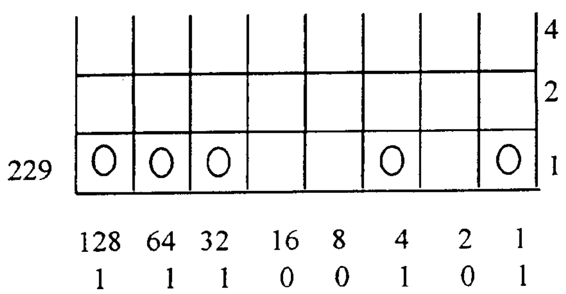
74 = 64 + 8 + 2
en 155 = 128 + 16 + 8 + 2 + 1

en plaatsen we de schijven volgens de binaire waarden op het bord, ieder getal op een eigen rij (figuur 1).



figuur 2: optelling 74 + 155, tweede stap

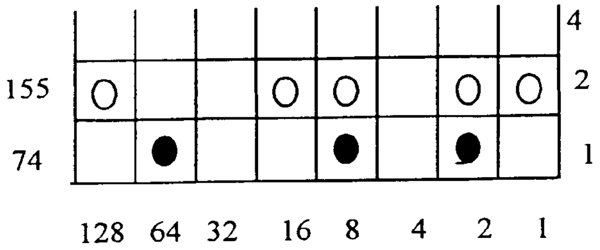
Dan 'tellen we de kolommen op' door de schijven van de tweede en eventuele volgende getallen naar de onderste rij te verplaatsen (figuur 2).



figuur 3: optelling 74 + 155, derde stap

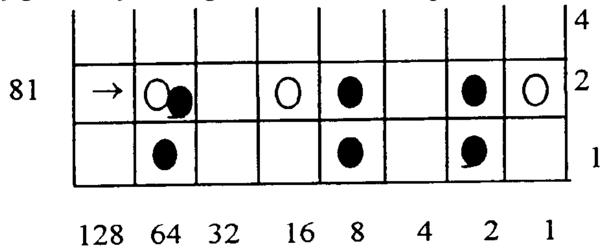
Tot slot 'vereenvoudigen' we door twee schijven in een veld te vervangen door één schijf in het volgende. In het voorbeeld 2 x 2 vervangen door 1 x 4; 2 x 8 door 1 x 16 en tot slot de nu ontstane 2 x 16 door 1 x 32, uitkomst: 229.
Merk op dat de schijven steeds de binaire notatie vormen van de getallen. Overigens beschreef Leibniz dit pas zo in 1679.

(Tot hier is het geen aanslag op iemands intellect. Dat probeer ik zo te houden.)



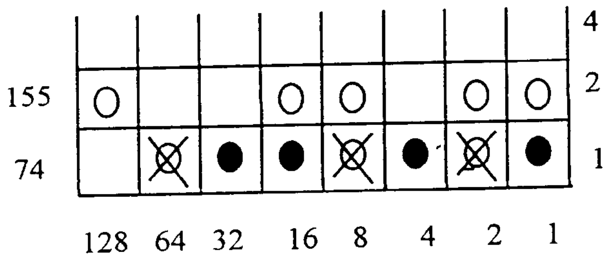
Aftrekken kan volgens twee methodes, hier volgt de eerste, b.v. voor 155 - 74. Leg de schijven weer in de binaire vorm (zie figuur 4).

figuur 4: aftrekking 155 - 74, eerste stap



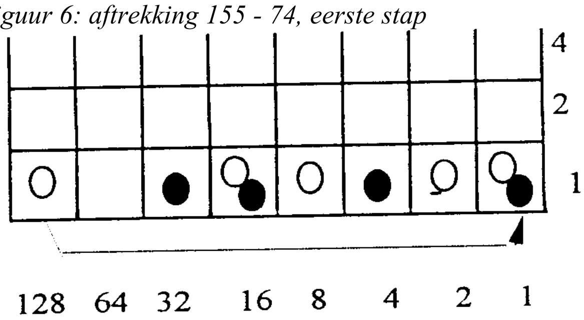
Zorg nu dat boven elke schijf van de aftrekker tenminste één schijf van het aftrektal ligt. In dit voorbeeld van 1 x 128, 2 x 64 maken. Neem tot slot de (in figuur 5) donker gekleurde schijven weg. Resultaat 1 0 1 0 0 0 1 = 81 in rij twee.

figuur 5: aftrekking 155 - 74, tweede stap



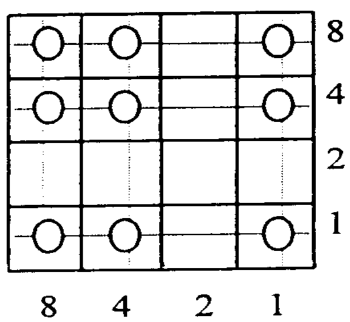
De tweede methode gaat met het complement van de aftrekker. We nemen weer de zelfde getallen, plaatsen het complement van 74 (de de donker gekleurde schijven van figuur 6).

figuur 6: aftrekking 155 - 74, eerste stap



Daarna nemen we de originele schijven van de aftrekker weg, tellen op, vereenvoudigen en verplaatsen tot slot de meest linkse schijf naar rechts (figuur 7).

figuur 7: aftrekking 155 - 74, tweede stap



Vermenigvuldigen blijkt verrassend eenvoudig te zijn. Neem als voorbeeld 13 x 13. Nu is 13 = 8 + 4 + 1. Eén getal komt horizontaal, het andere verticaal. Om te bepalen waar de schijven moeten komen tekenen we lijnen zowel horizontaal als verticaal door de rijen en kolommen van in dit voorbeeld 1, 4 en 8 (zie ------) en plaatsen op elk snijpunt een schijf (figuur 8).

fig. 8: vermenigvuldigen, 1e stap

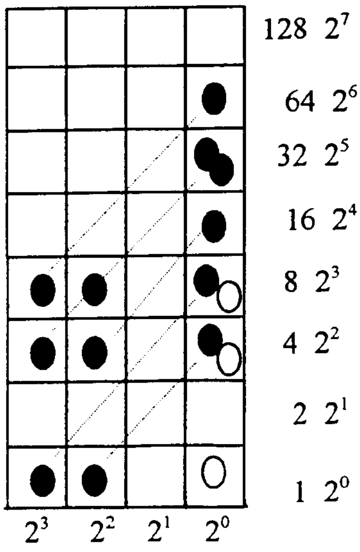


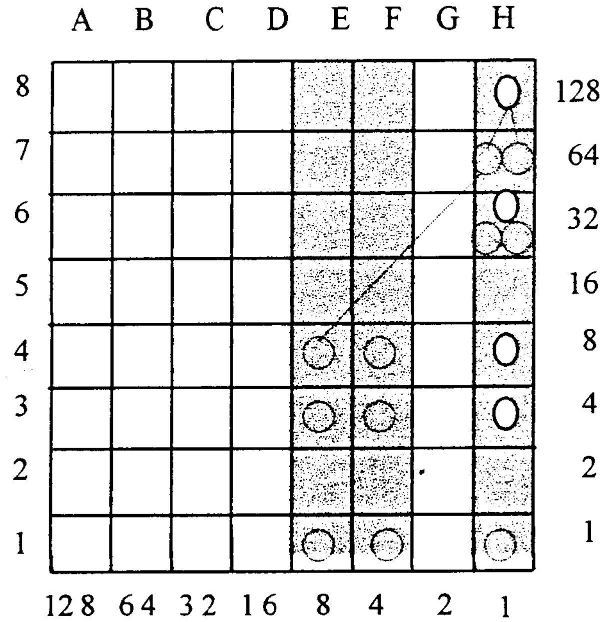
fig. 9: vermenigvuldigen, 2e stap

Verplaats nu alle schijven diagonaal naar rechtsboven (figuur 9). Bij het diagonaal verschuiven, behouden de schijven van de onderste rij hun waarde, die van de 2^e^ rij verdubbelen, van de 3^e^ verdrievoudigen, enz. Dit is dus het vermenigvuldigen door het optellen van de exponenten:

$$
\begin{array}{lllllll}
13 \times 13 = & 2^3 + 2^2 + 2^0 & & & & & \\
 & 2^3 + 2^2 + 2^0 & & & & & \\
 & \text{---------------} & & & & & \\
 & 2^6 + 2^5 + & & 2^3 & & & \\
 & \quad 2^5 + 2^4 + & & & 2^2 & & \\
 & & & 2^3 + 2^2 + 2^0 & & & \\
 & \text{--------------------------------} & & & & & \\
 & 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0 & & & & &
\end{array}
$$

Tot slot vereenvoudigen we weer door twee schijven in één veld te vervangen door één in het volgende :

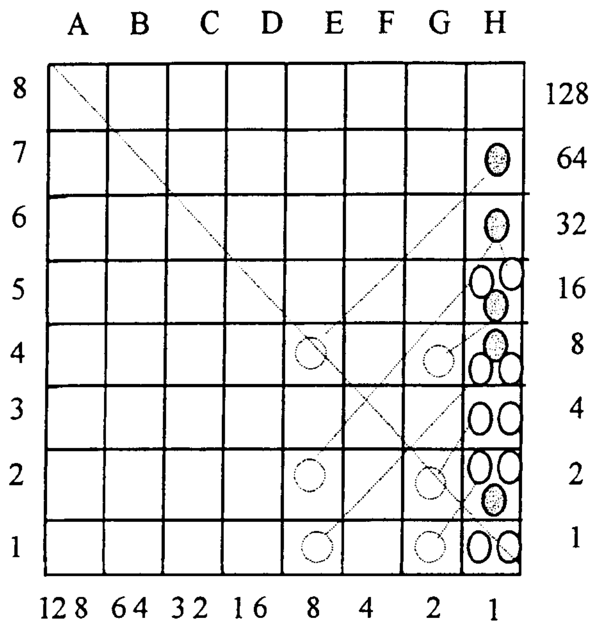
resultaat 1 0 1 0 1 0 0 1 = 169



figuur 10: delen 172 : 13 = 13, rest 3

Delen. Neem als voorbeeld 172 : 13. Deeltal; 172 = 128 + 32 + 8 + 4; plaats hiervoor de schijven in de kolom H. Deler; 13 = 8 + 4 + 1 of 1 1 0 1, dat wil zeggen dat de schijven van de deler in kolom E, F en H komen, steeds 3 op 1 rij. Begin de deling met schijf H8 diagonaal naar E5. Dan zou er ook een schijf moeten komen op F5 en H5. We zien dat voor F5 geen schijf beschikbaar is, dus gaat de schijf terug naar H8, dan verdubbeld naar H7. Nu één schijf van H7 naar E4 en de schijf van H6 naar F4: de eerste rij is compleet (E4, F4 en H4). Nu de andere schijf van H7 verdubbeld naar H6; één hiervan naar E3, de andere verdubbeld naar H5; één hiervan naar F3: de tweede rij is compleet, de andere verdubbeld naar H4; één hiervan naar E1, de andere verdubbeld naar H3; één van H3 naar F1, de andere verdubbeld naar H2; beide verdubbeld naar H1, één laten liggen: de derde rij is compleet, drie stuks van H1 wegnemen = rest.

(*vervolg; zie pagina 24*)



Worteltrekken. Neem als voorbeeld $\sqrt{122}$ (zie Ž) Als het getal onder het wortelteken geen kwadraat is, houden we een rest. De getallen die we zoeken zijn horizontaal en vertikaal gelijk en symetrisch t.o.v. diagonaal H1 - A8 (zie ook fig. 8). Kan de bovenste schijf diagonaal op de symetrie-as geschoven worden , dan is dit het eerste deel van de oplossing. Met de schijf op H6 lukt dit niet; met deze schijf op F4 is er geen voor E3, dus van H6 verdubbeld naar H5. Eén schijf van H5 naar E2, een ander naar G4, de laatste verd. naar H4. Eén hiervan naar E1, een ander verd. naar H3. Eén hiervan naar G2, de ander verd. naar H2; één hiervan naar G1, de ander verdubbeld naar H1: één wegnemen = rest. Oplossing: $122 = 11^2 + 1$.

figuur 11: worteltrekken %122

Opmerkingen

1. Er kan ook gerekend worden met de machten van -2 ,waardoor de rijen en kolommen benoemd worden als: +1, -2, +4, -8, +16, -32, +64 enz., een verhaal appart.
2. Het derde onderwerp uit Napier's Rabdologia is het "Promptuary of Multiplication".
3. In MIR 16 pag. 17 Fig. V, het vierkantje, betreft het "Promptuary of multiplication". Op de staafjes van Rabdologia staan de cijfers van de tafeltjes onder elkaar, op de strips van Promptuary staan de cijfers van de tafeltjes in meerdere vierkanten onder elkaar in steeds het zelfde patroon volgens de letters in dat vierkant.
   Fig. II en III geven twee voorbeelden van met staafjes samengestelde getallen, 1785 en 1364 met rechts van Fig. II een hulpstaafje.

Decimaal - binair

In bovenstaand artikel van Jo Donners wordt naast de decimale notatie, ook de binaire notatie gebruikt. De ‘wiskundigen’ in onze Kring weten dat er meerdere talstelsels in mogelijk zijn, en dat elk talstelsel haar eigen voordelen en gebruiksmogelijkheden kent. Voor de ‘niet-wiskundigen’ onder; hoe was ‘t ook alweer?

Bij een *decimaal* getal noteerd men in feite een reeks machten van tien:
zo is het getal **85 704** opgebouwd uit:

8 x 10^4 + **5** x 103 + **7** x 102 + **0** x 10^1 + **4** x 10^0 =
80 000 + 5 000 + 700 + 0 + 4 = 85 704

Ook bij een *binair* getal wordt een reeks machten, in dit geval van twee, genoteerd:

1 0 1 0 1 0 0 1 moet gelezen worden als:
1 x 2^7 + **0** x 2^6 + **1** x 2^5 + **0** x 2^4 + **1** x 2^3 + **0** x 2^2 + **0** x 2^1 + **1** x 2^0 =
1 x 128 + 0 x 64 + 1 x 32 + 0 x 16 + 1 x 8 + 0 x 4 + 0 x 2 + 1 x 1 = 169

Degenen die regelmatig met zowel binaire als decimale (en/of hexadecimale) getallen werken, hebben wat ezelsbruggetjes achter de hand of een daarvoor geschikte zakrekenmachine of een programaatje op de pc.