KERSTBOOMFORMULES

Andries de Man

Nicole Wrightham en Alex Craig, twee studenten van de Universiteit van Sheffield, hebben formules gepubliceerd voor de benodigde hoeveelheid versiering van een kerstboom, als functie van de hoogte *h* van de boom (in cm):[1]

Aantal kerstballen = $h\sqrt{17}/20$

Lengte van het lampjes-snoer (cm) = πh

Lengte van de slinger (cm) = $13\pi h/8$

Hoogte van de piek (cm) = $h/10$

Het valt op dat de formules lineair zijn in *h*. Dit is vreemd, en heeft al geleid tot de opmerking dat $h^{3/2}$ beter zou zijn.[2] Deze suggestie is niet nader uitgelegd, dus laten we het hier beter aanpakken.

De ballen

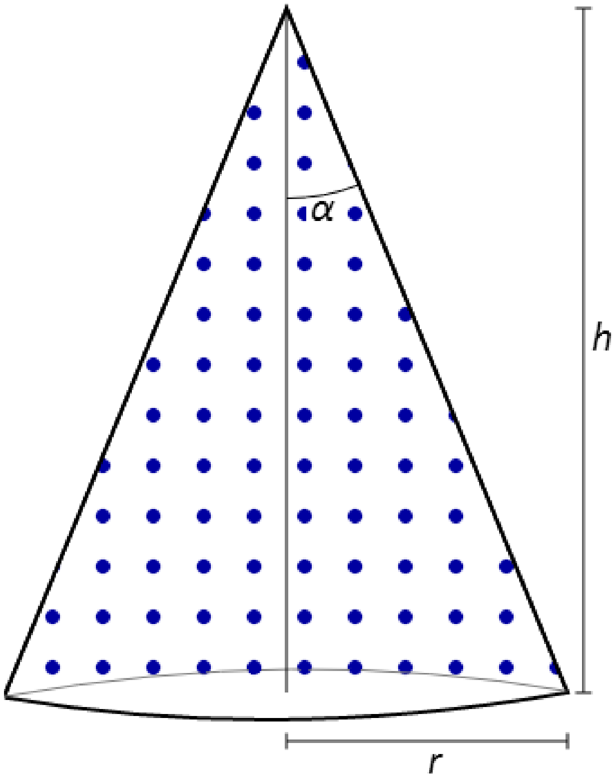
In het KRO televisieprogramma 'De Rekenkamer'[3] van 5 december 2013 besprak Ionica Smeets deze formules. Hoewel ze uiteindelijk de Engelse formules gebruikte, begon ze met de aanname dat de kerstballen homogeen over het oppervlak van de kerstboom moeten worden verdeeld, met oppervlaktedichtheid σ, en dat de kerstboom een kegel is met straal r.

Dit levert de volgende formule voor het aantal kerstballen:

Aantal kerstballen = $\sigma \pi r \sqrt{(r^2+h^2)}$

(σ maal oppervlak van een *open* kegel, want we hangen geen lampjes aan het ondervlak van de kerstboom).

Deze formule zou uitgerekend kunnen worden met behulp van de **P** en **Q** schalen van de Sun Hemmi 351,[4] die lopen als x^2. Deze schalen zijn niet te verwarren met de **P**-schaal van een Darmstadt, die loopt als $\sqrt{(1-x^2)}$.



Geometrie van een kerstboom, Met homogene ballenverdeling

Als er een vaste relatie is tussen r en h zouden we kunnen volstaan met het opmeten van de hoogte. Om na te gaan of die relatie bestaat heb ik in de beeld-zoekmachine van Google foto's van echte kerstbomen gezocht en uitgemeten. De foto's werden handmatig gefilterd op frontaal gefotografeerde bomen waarvan de basis van de 'kegel' niet door pakjes of stallen was verborgen. Ik heb geen rekening gehouden met verschillen in boomsoorten. Gemiddeld over 33 foto's is de halve tophoek α van een kerstboom 21 ± 4°, dus $r = h \tan(21 \pm 4°) = h\,(0.38 \pm 0.08)$. [5]

De verbeterde formule-in-h voor het aantal kerstballen als functie van de hoogte is:

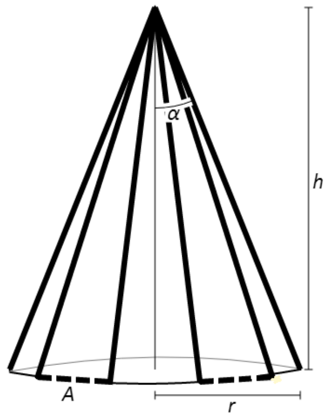
Aantal kerstballen = $\sigma \pi\, 0.38\, h \sqrt{(0.38^2+1^2)}\, h = 0.41\, \sigma \pi h^2$

Volgens de oorspronkelijke formule had Ionica's kerstboom (h = 200 cm en r = 73 cm) 41 ballen nodig. Dat komt overeen met een oppervlaktedichtheid σ van 8.4 ballen per vierkante meter.
De verbeterde kerstballenformule kan dus vereenvoudigd worden tot

Aantal kerstballen = $(0.00108 \pm 0.00025)\, h^2$ (met h in cm!)

De lampjes

De Belgische Eclecticsite[6] gebruikt voor de lengte van het lampjes-snoer een formule die gebaseerd is op snoeren die kaarsrecht van de piek naar de basis lopen. Er is dus geen sprake van een homogene verdeling! Aan de basis is de afstand tussen de snoeren *A*. De totale lengte van de lampjes-snoeren is dan $\sqrt{(h^2 + r^2)}\ 2\pi\, r / A$. Eclecticsite suggereert voor $h = 2.5$ m en $r = 80$ cm (dus $\alpha = 18°$) een afstand $A = 15$ cm, waardoor dus in het totaal 88 m aan lampjes-snoer nodig is. Als je maar één snoer gebruikt zal een deel van het snoer horizontaal rond een deel van de basis lopen. De extra lengte die daarmee gemoeid is, gestippeld in de figuur, is de helft van de omtrek van de basis. De lengte voor één lampjessnoer is dus $\sqrt{(h^2 + r^2)}\ 2\pi\, r / A + \pi\, r$



Belgische lampjesverdeling

Een fraaiere verdeling van de lampjes wordt gegeven door een helix. Als deze helix een spoed *s* heeft, gemeten in verticale richting, wordt het snoer beschreven met de formule:

$$(x,y,z) = s\,\varphi/(2\pi\, h)\ (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ h)$$

met: φ = poolhoek, die loopt van 0 tot $2\pi h/s$ (dus meerdere cycli)

De lengte L_{lamp} van het snoer wordt gegeven door:

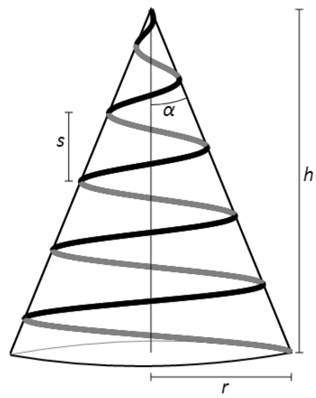
$$L_{lamp} = \int\sqrt{\left((dx/d\varphi)^2 + (dy/d\varphi)^2 + (dz/d\varphi)^2\right)}\, d\varphi$$

$$= s / (2\pi\, h) \int\sqrt{\left((r\cos\varphi - \varphi\, r\sin\varphi)^2 + (r\sin\varphi + \varphi\, r\cos\varphi)^2 + h^2 \right)}\, d\varphi$$

$$= s / (2\pi\, h) \int\sqrt{\left(r^2 + \varphi^2\, r^2 + h^2\right)}\, d\varphi$$

$$= s\, r / (2\pi\, h) \int\sqrt{(c^2 + \varphi^2)}\, d\varphi$$

met $c^2 = 1 + h^2/r^2$



Lampjesverdeling in een helix

$$= s\, r / (4\pi\, h)\ \left[\varphi\sqrt{(c^2 + \varphi^2)} + c^2 \ln(\varphi + \sqrt{(c^2 + \varphi^2)})\right]_0^{2\pi h/s}$$

oftewel

$$= s\, r / (4\pi\, h)\ \left[\varphi\sqrt{(c^2 + \varphi^2)} + c^2\, \mathrm{arcsinh}(\varphi/c)\right]_0^{2\pi h/s}$$

$$= s\, r / (4\pi\, h)\ \left(2\pi h/s\sqrt{(c^2 + (2\pi h/s)^2)} + c^2\, \mathrm{arcsinh}(2\pi h/(sc))\right)$$

$$= r / h\ \left(\pi h\sqrt{\left((c/2\pi)^2 + (h/s)^2\right)} + c^2/(4\pi)\ s\, \mathrm{arcsinh}(2\pi h/(sc))\right)$$

Gebruiken we weer $r = h\tan(21°)$, dan vinden we

$$\mathbf{L_{lamp} = 1.206\, \boldsymbol{h} \sqrt{(1.536 + (\boldsymbol{h}/\boldsymbol{s})^2)} + 1.852\, \boldsymbol{s}\ arcsinh(0.807\, \boldsymbol{h}/s)}$$

Voor het eerste deel hebben we dus weer Sun Hemmi 351's **P** en **Q**-schalen nodig. Voor arcsinh kan de Gudermann $\mathbf{G_\theta}$-schaal in combinatie met een **T**-schaal worden gebruikt, die ook op de Sun Hemmi 351 is te vinden.[4] In de praktijk kan het arcsinh-deel van de som verwaarloosd worden.

De slinger

Voor de formule voor de slinger kunnen we uitgaan van de lampjes-formule, maar nu met een correctie voor het doorzakken van de slinger tussen de ophangpunten. In de Engelse formules is de slinger 13/8 keer zo lang als het lampjes-snoer. De bekende kettinglijn-formule geeft voor punten (x,z) op de kettinglijn

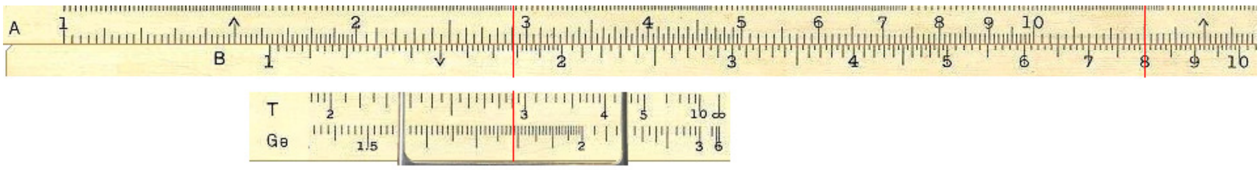
$z/b = \cosh(x/b)$ met *b* de kromtestraal in het laagste punt

De lengte L van een kettinglijn tussen punten $(-x_0,0)$ en $(+x_0,0)$ is[7]

$$L = 2\, b \sinh(x_0/b)$$

Als deze lengte 13/8 keer de afstand is tussen de ophangpunten dan wordt de relatieve kromtestraal b/x_0 gegeven door 13/8 $(x_0/b) = \sinh(x_0/b)$.

Dit is met de Sun Hemmi 351 uit te rekenen: zet 13 boven 8 op de **A** en **B** schalen en zoek een paar getallen die op de **T** en $\mathbf{G_\theta}$-schalen én op de **A** en **B** schaal boven elkaar staan. Je vindt dan: $x_0/b = 1.788$ (op bijgaande foto zijn de gevonden getallen precies onder elkaar gezet, maar dat is in werkelijkheid niet zo).



De doorzakking van de slinger is $b(\cosh(x_0/b) - 1) = x_0/1.788\ (3.073 - 1) = 1.159\ x_0$
Dit is tamelijk overdreven: op de gevonden foto's is de doorzakking $(0.57 \pm 0.27)\ x_0$ wat correspondeert met $x_0/b = 1.12$. De lengte van de slinger is dan 1.22 maal de lengte van het lampjessnoer, dus minder dan 13/8. Met de faktor 1.22 wordt de formule voor de lengte van de slinger:

$$\mathbf{L_{slinger} = 1.475\ \mathit{h}\ \sqrt{(1.536 + (\mathit{h/s})^2)} + 2.265\ \mathit{s}\ arcsinh(0.807\ \mathit{h}/s)}$$

De piek

De formule voor de piek lijkt alleen gebaseerd op esthetische eisen. Bij de gebruikte constante is een rekenliniaal niet echt nodig.

Slotopmerkingen

De formules die de Engelse studenten hebben verzonnen zijn eenvoudig met een rekenliniaal uit te rekenen. Alle berekeningen kunnen met één setting op een eenvoudige Mannheim worden uitgevoerd. Voor extra gebruiksgemak kunt u gauge marks voor de constanten toevoegen. π staat natuurlijk al op de meeste rekenlinialen, maar $\sqrt{17/20} = 0.2062$ en $13\ \pi/8 = 5.105$ komen niet voor in Panagiotis Venetsianos' lijst[8]

De exacte formules kunnen niet in één setting op een rekenliniaal uitgerekend worden, maar wel in een aantal stappen op een Sun Hemmi 153. Dus als u weer eens een kerstboom gaat optuigen, zorg dan dat u een Sun Hemmi 153 bij de hand hebt.

Hierbij bedank ik nog Otto van Poelje voor informatie over de het verschil tussen de ene **P** en de andere.

[1] http://www.shef.ac.uk/news/nr/debenhams-christmas-tree-formula-1.227810 (7 december 2013)

[2] http://www.gizmag.com/christmas-tree-decoration-mathematical-formula/25388/ (7 december 2013)
http://www.techhive.com/article/2018984/treegonometry-uses-math-to-perfectly-decorate-a-christmas-tree.html (10 december 2013)

[3] KRO 'De Rekenkamer' http://derekenkamer.kro.nl/seizoenen/seizoen_5_2013/afleveringen/05-12-2013/formule_voor_een_geslaagde_kerst (5 december 2013)

[4] Hebt u geen Sun Hemmi 153, gebruik dan de virtuele Sun Hemmi 153 op http://www.marksmath.com/slide-rules/virtual/hemmi-153/hemmi-153.html

[5] De halve tophoek voor **kunstmatige** kerstbomen is, uit 28 patentaanmeldingen, 20 ± 4°. Er zijn veel meer patentaanmeldingen voor kunstmatige kerstbomen maar ze zijn vaak zo onnatuurlijk dat ze niet in de statistiek mogen worden opgenomen.

[6] http://www.eclecticsite.be/calc/kerstmisBoom.htm

[7] We vereenvoudigen het probleem hier door de begin- en eindpunten van een slinger-segment in hetzelfde horizontale vlak te houden. Als de slinger is afgeleid van het lampjes-snoer zouden deze punten op een helix moeten liggen, en zou de slinger niet meer symmetrisch uitzakken.
[8] Panagiotis Venetsianos, "Pocketbook of the Gauge Marks", The Oughtred Society, 2006.