De Log. Wetten van Weber-Fechner en S.S. Stevens

Simon van der Salm

Dat logaritmen in biofysische toepassingen een aanzienlijk rol spelen, laat het volgende voorbeeld zien, dat ik ontleen aan de reader *Metrologie & Statistiek voor Medisch Technici*, [1].

De logaritme als verhoudingsgetal

In het bovenstaande artikel over de logaritme van Napier wordt de rekenregel $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow$ NapLog a - NapLog b = NapLog c - NapLog d in verband gebracht met de astronomie en navigatie (op zee). Deze fundamentele regel komen we ook tegen in de psychofysica, de tak van wetenschap die de relatie tussen een *objectieve* fysische stimulus (bijvoorbeeld de hoeveelheid suiker in frisdrank) en de *subjectieve* sensatie van die stimulus (de ervaren zoetheid van die frisdrank) onderzoekt. Belangrijke onderzoekers op dit terrein, waren, in de 19e eeuw Fechner, die het werk van Weber voortzette, en in de 20e eeuw Stanley Smith Stevens.

Stimulus en perceptie

Het onderzoek van Weber en Fechner betrof:

- Het detectieprobleem: hoe groot is de kleinste waarde van de stimulus die nog juist kan worden waargenomen, de *absolute drempel* genaamd.
- Het discriminatieprobleem: wat is het kleinste verschil tussen twee stimuli die een mens nog kan detecteren, het *juist waarneembare verschil* genoemd.
- Schaling: hoe verandert de menselijke perceptie als de intensiteit van de stimulus verandert?

In 1860 formuleerden Ernst Weber (1795–1878) en Gustav Fechner (1801-1887), na veel experimenten een wiskundige wetmatigheid betreffende de menselijke perceptie S (sensatie bij horen, proeven, aanraken en ruiken) als functie van de intensiteit I van een fysieke stimulus. Iedereen kent die relatie wel uit eigen ervaring. Als je twee eieren in je handen neemt, de ene met een gewicht van bijvoorbeeld 60 gram, en een tweede dat iets zwaarder is, dan kun je die tweede pas als zwaarder ervaren, als het gewicht ervan minimaal 62 gram is, dus 2 gram zwaarder dan de eerste. Of, als je een emmer met 10 liter water in je linkerhand draagt en een iets zwaardere in je rechterhand, dan kun je de rechter pas herkennen als zwaarder, als de inhoud ongeveer 300 mL groter is dan 10 liter. Dat wil zeggen dat de minimale verandering van de psychofysische sensatie S, als gevolg van een minimale verandering van de intensiteit I, relatief is ten opzichte van die intensiteitswaarde I (bijvoorbeeld het gewicht): $\Delta S_{\min} = k \frac{\Delta I_{\min}}{I}$. De evenredigheidsconstante k is afhankelijk van het soort zintuig, de specifieke proefpersoon en soms ook van de omstandigheden. Opmerkelijk is de ontdekking dat het nog net waarneembare verschil $\Delta I_{\min}$, voor de meeste proefpersonen, in de buurt ligt van 3% van de intensiteit I.

Formule van Fechner

Fechner vond dat de formule niet alleen voor het nog juist waarneembare verschil geldt, maar algemener toepasbaar is, en geformuleerd kan worden met de differentiaalvergelijking:

$dS = k\dfrac{dI}{I}$ (1). Uit deze differentiaalvergelijking volgt $S = k\log\dfrac{I}{I_0}$ (2), waarbij I_0 de minimale (drempel)waarde is waarbij de stimulus I nog net wordt waargenomen. Voor het bijbehorende lineaire regressiemodel geldt $S = k\log\dfrac{I}{I_0} = -k\log I_0 + k\log I$ (3)

Dimensieloze grootheid

De sensatie S is een dimensieloze grootheid, dus dat betekent dat ook $k\log\dfrac{I}{I_0}$ dimensieloos moet zijn. De constante k is dus dimensieloos. De logaritme kan alleen van dimensieloze getallen worden genomen, waardoor formule (3) eigenlijk niet zo geformuleerd zou mogen worden. Wel kunnen we die formule opvatten als $S = k\log\dfrac{I}{I_0} = -k\log\dfrac{I_0}{1} + k\log\dfrac{I}{1}$, maar dat vindt men zo omslachtig, dat men gewoonlijk toch de formulering van formule (3) accepteert.

Voorbeeld: De decibelschaal

De Wet van Weber-Fechner kunnen we fraai illustreren aan de hand van decibels. Een ervaren geluidstechnicus (geblinddoekt) krijgt, in willekeurige volgorde, 15 verschillende geluidsintensiteiten bij een frequentie van 1000 Hz te horen, en moet op een dB-schaal zijn perceptie S (in dit geval het geluidsniveau L in dB) van de intensiteit I (in dit geval de geluidsdruk p in μPa, in lucht) aangeven. De drempelwaarde is de ‘gemiddelde’ drempeldruk in lucht: $I_0 = p_0 = 20\ \mu\text{Pa}$. De meetresultaten staan in tabel 1. Met behulp van lineaire regressie bepalen we de best passende lijn in de datawolk. We zien een sterk lineair verband tussen de perceptie S en de logaritme van de relatieve stimulus I / I_0, wat een sterke aanwijzing is dat de hypothese van Weber-Fechner voor geluidsniveaus juist kan zijn.

Bovendien zien we dat de constante k de helling b van de regressielijn is. De *waargenomen absolute drempelwaarde* bij deze specifieke testpersoon wordt berekend met $p_0 = I_0 = 20\cdot 10^{-\frac{a}{b}}\ \mu\text{Pa}$.

Meting	Stimulus Intensiteit I Geluidsdruk p in μPa)	Perceptie Sensatie S Geluidsniveau L in dB	$\log I/I_0$	Regressie $S = a + b\cdot\log I/I_0$
1	20	13	0.0000	5.74
2	50	26	0.3979	13.46
3	100	10	0.6990	19.29
4	200	25	1.0000	25.13
5	500	27	1.3979	32.85
6	1000	45	1.6990	38.69
7	2000	56	2.0000	44.52
8	5000	69	2.3979	52.24
9	10000	51	2.6990	58.08
10	20000	53	3.0000	63.91
11	50000	75	3.3979	71.63
12	100000	64	3.6990	77.47
13	200000	98	4.0000	83.31
14	500000	91	4.3979	91.02
15	1000000	91	4.6990	96.86
			b =	19.39
			a =	5.74
			R^2 =	0.89
			Drempel =	10.12
			log dr. =	-0.30

Tabel 1.
De 15 meetwaarden en benaderende waarden berekend met lineaire regressie.

De Wet van S.S. Stevens

De Wet van Weber-Fechner is gebaseerd op de ervaring dat veel (maar niet alle) gelijke stimulusverhoudingen gelijke *perceptieverschillen* veroorzaken: $S_2 - S_1 = k \log \frac{I_2}{I_1}$ (4). De Wet van S. S. Stevens (1957) is daarentegen afgeleid van de veronderstelling (invariantie voor herschaling) dat gelijke stimulusverhoudingen gelijke *perceptieverhoudingen* veroorzaken: $S = k\left(\frac{I}{I_0}\right)^{\alpha}$ (5), oftewel

$\log S = \log k - \alpha \log I_0 + \alpha \log I$ (6).

Deze Wet wordt vaak de *Machtswet van Stevens* genoemd.

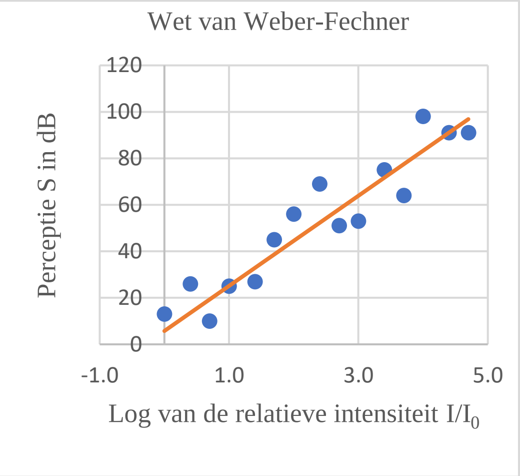

Fig. 1. Lineaire regressie van perceptie tegen stimulus, bij een logaritmische schaal voor de relatieve intensiteit.

In de Wet van Weber-Fechner is de sensatie *S* een lineaire functie van log *I*; in de Wet van Stevens daarentegen, is de logaritme van de sensatie log *S* een lineaire functie van log *I*. Verder volgt uit formule (6) dat $\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^{\alpha}$ (7) voor een empirische te bepalen waarde voor α. We zien dat verhoudingen van stimuli-intensiteiten worden vertaald in corresponderende verhoudingen van percepties.

Voorbeeld: De zoetheid van sucralose

De volgende gegevens ontlenen we aan: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2772566921000070/.

Een testpanel bestond uit 20 deskundige personen, die de mate van zoetheid *S* moest bepalen van de zoetstof *sucralose*, relatief ten opzichte van een al bekende perceptiedrempel. Elke testpersoon kreeg 5 relatieve stimuli aangeboden. Zie tabel 2. De 5 datapunten worden uitgezet in log-log-grafiek. Zie figuur 2.

Zoetheid van Sucralose			
Relatieve stimulus	Perceptie/Sensatie		
I/I_0	S (gemiddeld)	$\log I/I_0$	log S
25	12.7	1.40	1.10
35	14.7	1.54	1.17
60	20.0	1.78	1.30
90	25.1	1.95	1.40
145	29.0	2.16	1.46
a =	0.4201	$k = 10^a =$	2.6
b =	0.4905	$\alpha =$	0.49
R^2 =	0.99		

Tabel 2. De gemiddelde perceptiescore S van de 20 afzonderlijke scores als functie van de relatieve intensiteit.

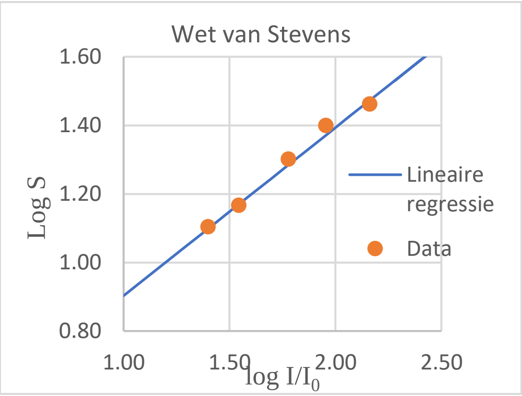

Fig. 2. Log-log-grafiek met de 5 datapunten en de best passende regressielijn. Merk op dat de assen niet bij 0 beginnen!

We zien dat de 5 datapunten nagenoeg samenvallen met de regressielijn, wat laat zien dat *in dit specifieke geval* de Wet van Stevens een valide model lijkt te zijn. Een rechte lijn op een dubbel-logaritmisch assenstelsel wijst immers op een machtsfunctie. De validiteit blijkt ook uit de zeer hoge waarde van R^2. We kunnen dus concluderen dat bij dit betreffende verschijnsel bij zeer goede benadering geldt:

$$S = k\left(\frac{I}{I_0}\right)^{\alpha} = 2.6\left(\frac{I}{I_0}\right)^{0.49} \quad (8)$$

Referentie:

[1] Reader *Metrologie & Statistiek voor Medisch Technici MTC*, Versie 2a, pp. 172 – 174, Intop Zorgsector en Techniekschool, Woerden, t.b.v. College voor Zorgopleidingen (CZO), Utrecht.