7. De kettinglijn en hyperbolische functies
Simon A.M. van der Salm

Behoefte aan hyp-schalen

De verzamelaar die zich bezighoudt met bijzondere schalen die op rekenlinialen en -schijven voorkomen, valt het al spoedig op dat slechts weinig rekenlinialen voorzien zijn van hyperbolische schalen.

Dit is des te opmerkelijker daar tegenwoordig iedere enigszins uitgebreide elektronische rekenmachine, zoals die die op middelbare scholen worden gebruikt, voorzien is van toetsen voor hyperbolische functies en zelfs voor de inversen van deze functies.

Is de behoefte aan deze functies tegenwoordig veel groter dan vroeger of is het louter een kwestie van een gadget voor het beter doen verkopen van deze rekenapparaten? Het programmeren van een hyperbolische functie in een rekenmachine is immers relatief eenvoudig, waardoor deze functie zonder veel extra kosten aan het rekenapparaat is toe te voegen.

Een interessante feature dus, zonder veel meerwaarde? Mijn ervaring als docent is in elk geval dat slechts een enkele eerstejaars student, die net de middelbare school verlaten heeft, weet wat bijvoorbeeld een hyperbolische sinus is, ondanks het feit dat een knopje met het woord HYP, of een knopje met sinh, prominent op zijn rekenmachine aanwezig is.

Het is jammer dat kennelijk in de wiskundelessen op middelbare scholen ook nauwelijks aandacht wordt besteed aan de meest bekende toepassing, namelijk de *kettinglijn***,** die toch een fraaie alledaagse uitbeelding is van een hyperbolische functie.

Uitgaande van het geringe aantal typen rekenlinialen met hyperbolische schalen dat voor 1975 geproduceerd werd, moet je wel tot de conclusie komen dat er niet heel veel behoefte bestond aan deze schalen.

Aristo 0971 HyperboLog;

Blundell 506 Log-Log Electro, JV 56 Multi-Log Vector Duplex;

Ding Feng 5471 Duplex Vector;

Faber-Castell Mathema;

Flying Fish 1002, 1003;

Graphoplex Neperlog Hyperbolic 691 a;

Hemmi 154, 255 Electrical Engineering, 255D, 257L en 275 Duplex Elec Eng;

Jiang Shi zonder nummer;

Keuffel & Esser 4083-3 en 4083 -5 Log-Log Duplex Vector;

Pickett & Eckel N4-ES Vector LogLog Dual Base Speed;

Sida ???, 1015, 1083;

Naar schatting is dit minder dan 1 procent van de linialen die Peter Hopp in zijn boek noemt, en vermoedelijk veel minder dan 1 procent van het totale aantal geproduceerde linialen.

Nadere bestudering laat zien dat vooral in de elektrotechniek behoefte bestond aan hyperbolische schalen op rekenlinialen, maar in dit artikel zal ik bijvoorbeeld laten zien dat er ook een interessante toepassing van een hyperbolische functie in de bouwkunde bestaat.

Zo leerde ik tijdens mijn studie elektrotechniek op de HTS, in relatie met transmissielijnen bij het vak telecommunicatie toepassingen van hyperbolische functies. De numerieke problemen die opdoken bij het berekenen

van de specifieke hyperbolische grootheden voor transmissielijnen werden gewoonlijk

Figuur 1: Een kettinglijn

echter niet door middel van een rekenlinaal opgelost, maar door het gebruik van speciale grafiekkaarten. Deze grafiekkaarten waren echter alleen geldig onder speciale randvoorwaarden, voorwaarden waaraan de schoolproblemen meestal wel voldeden.

De numerieke waarde van hyperbolische grootheden werd bovendien, zeker als een tamelijk grote nauwkeurigheid was vereist, bepaald aan de hand van tabellen die in de wat uitgebreidere tabellenboeken aan de orde kwamen.

De kettinglijn

De kettinglijn is misschien wel de meest voorkomende uiting van een hyperbolische functie. De waslijn, de ankerketting van een schip, de kabel waaraan de elektrische bovenleiding van de treinbaan hangt en de kabel waaraan een suspension bridge hangt, nemen allen de vorm van een hyperbolische cosinus aan. Zie figuur 1.

Ook de omgekeerde kettingijn komt voor, bijvoorbeeld in de boogconstructies in gebouwen.(De boog boven deuren kan hyperbolisch zijn). De fraaiste toepassing laat de *Gateway Arch* in St. Louis, Missouri, USA zien. Deze fraaie, bijna 200 meter hoge, boogconstructie, die de poort naar het westen van de Verenigde Saten voorstelt, is een op zijn kop geplaatste hyperbolische cosinus, dus een naar boven gekeerde kettinglijn.

Zie de foto's in figuur 2.

Goniometrische en hyperbolische functies De hyperbolische functies werden in 1757 gë ntroduceerd doorVicenzo Riccati (1707-1775) naar aanleiding van eerdere ontdekkingen van Euler betreffende de fundamentele relatie (de formule van Euler) tussen de goniometrische functies en e-machten.

Figuur 2: The Gateway Arch in St. Louis

Riccati ontwierp de hyperbolische functies op het complexe vlak als periodieke functies met een zuiver imaginaire periode, als tegenhangers van de bekende goniometrische functies, die een zuiver reële periode bezitten. Zie [**2**]. Riccati gebruikte overigens de notatie Sh en Ch voor hyperbolische sinus en -cosinus. Zie [**3**]. Deze Riccati-notatie vinden we gewoonlijk op rekenlinialen met hyperbolische schalen.

De theorie van de hyperbolische functies werd in 1768 verder ontwikkeld door J.H. Lambert (1728-1777), die een andere veel gebruikte notatie introduceerde, namelijk de letter h achter de gebruikelijke benamingen van de goniometrische functies. Lambert schreef dus sinh en cosh voor hyperbolische sinus en -cosinus. Zie [**3**]. Rekenmachines hanteren meestal de Lambert-notatie voor hyperbolische functies. Ook de schrijvers van leerboeken over mathematische analyse gebruiken bij voorkeur de notatie van Lambert.

Wie een leerboek over wiskundige analyse openslaat bij het onderwerp hyperbolische functies ziet formules voor deze functies die in hoge mate overeen komen met formules voor goniometrische functies. Een drietal paren van deze formules is:

$$\begin{cases}\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\end{cases}$$

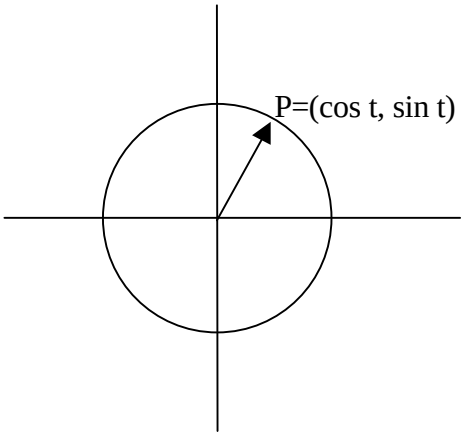
$$\begin{cases}\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + ... \\ \sinh x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + ...\end{cases}$$

De goniometrische functies, waarvan sinus en cosinus de meest prominenten zijn, worden wel met het woord *cirkelfuncties* aangeduid. Dit woord moet niet worden verward met *cyclometrische functies*, een benaming die voor de inversen van de goniometrische functies in gebruik is.

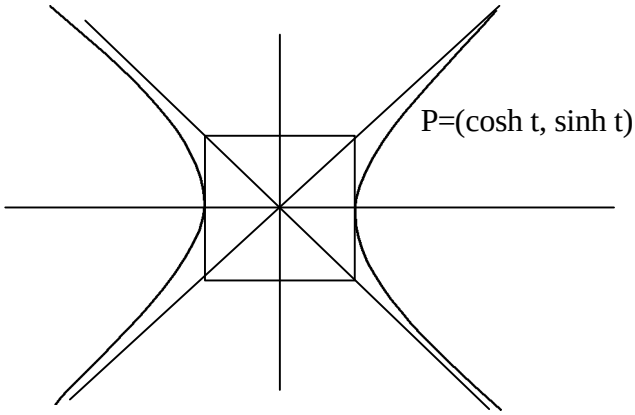
De cirkelfuncties sin en cos beschrijven in parametervorm de eenheidscirkel, waarvan $x^2 + y^2 = 1$ de coördinaatvergelijking is,. Ieder punt P van de cirkel kunnen we voorstellen door de coördinaten (cos t, sin t), waarbij we de waarde van t kunnen interpreteren als de langs de cirkel gemeten afstand van het punt (1,0) tot P. Er geldt immers: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Zie figuur 3.



Figuur 3: De eenheidscirkel

De hyperbolische functies ontlenen hun naam aan het feit dat sinh en cosh gebruikt kunnen worden om de eenheidshyperbool met vergelijking $x^2 - y^2 = 1$ parametrisch te beschrijven. Zie figuur 4. In deze figuur zien we het vierkant door de punten (1,0) en (0,1) en de asymptoten met vergelijkingen y = x en y = -x



Figuur 4: De eenheidshyperbool

Ieder punt op de rechtertak van de hyperbool is van de gedaante

(cosh t, sinh t); ieder punt op de linkertak van de hyperbool is van de gedaante

(-cosh t, sinh t). Immers $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

De formule van Euler en periodiciteit.

In de "Introductio in Analysin Infinitiorum" van 1748 publiceerde Euler zijn beroemde formule die een enorme stap verder betekende in de ontwikkeling van de theorie der complexe getallen en als de basale kern van deze theorie kan worden beschouwd.

De formule van Euler luidt:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$(i = \sqrt{-1});\ t \ \ reeel \ \ getal$$

De formule van Euler laat zien dat ieder punt van de eenheidscirkel in het complexe vlak als e-macht (met imaginaire exponent) kan worden voorgesteld.

Overigens was deze formule in diverse andere gedaanten al bekend bij anderen. Zie [**4**].

Deze formule vormt bovendien de verbindende schakel tussen de goniometrische en hyperbolische functies. De functies in beide klassen hebben als kenmerk dat ze alle kunnen worden uitgedrukt in e-machten. Juist de gemeenschappelijke uitdrukking door middel van e-machten is de oorzaak van het fenomeen dat zoveel goniometrische en hyperbolische formules min of meer analoge gedaantes hebben.

De formule van Euler laat zien dat ieder punt van de eenheidscirkel in het complexe vlak als e-macht kan worden voorgesteld.

Uit de formule van Euler volgen de e-machtuitdrukkingen voor de sin en cos:

$$\begin{cases} \sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \\ \cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} \end{cases}$$

Dat e^{it} periodiek is met periode $2p$ is begrijpelijk gezien de periodiciteit van de sin en cos en ook gezien het feit dat deze e-macht een punt op een cirkel voorstelt.

Is nu z een complex getal $x + iy$ dan geldt:

$$e^z = e^x e^{iy}$$

De complexe e-macht is dus kennelijk een functie die in verticale richting periodiek is op het complexe vlak met periode $2p$.

Riccati definieerde nu de hyperbolische basisfuncties als volgt:

$$\begin{cases} \sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} \end{cases}$$

Hierin is z een complex getal, maar de formules zijn ook geldig voor het geval dat z reëel is. Deze twee hyperbolische functies zijn op het complexe vlak in verticale richting periodiek met periode $2p$.

Op overeenkomstige wijze laten de goniometrische basisfuncties zich uitdrukken in e-machten.

We vinden dan:

$$\begin{cases} \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \end{cases}$$

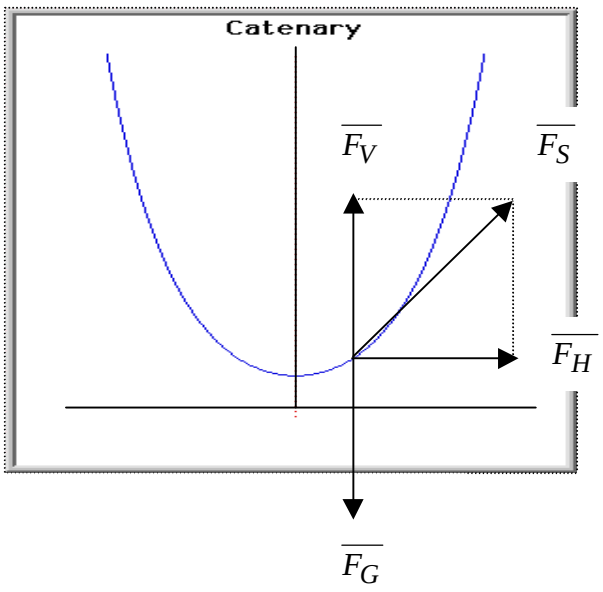
We zien hier nu twee functies die op het complexe vlak periodiek zijn in horizontale richting met periode $2p$.

Door hun periodiciteit kunnen dus ook de hyperbolische functies gebruikt worden bij het beschrijven van periodieke verschijnselen, zoals bijvoorbeeld zich voortplantende elektromagnetische golven..

De formule van de *kettinglijn* bevat de hyperbolische cosinus als als een reëelwaardige functie van de horizontale uitwijking u. Hierdoor zien we niets van de periodiciteit van de cosh op het complexe vlak.

In het volgende kader wordt de afleiding van de formule van de kettinglijn getoond.

Figuur 5 toont de bijbehorende krachten in de kettinglijn.



Kettinglijnformule

$\overline{F_S}$ = *spankracht*

$\overline{F_V}$ = *verticale component*

$\overline{F_H}$ = *horizontale component*

$\overline{F_G}$ = *gewicht koord van basispunt tot beschouwd punt*

u = *horizontale uitwijking*

v = *hoogte als functie van* u

a = *hoek tussen spankracht en horizon*

s = *soortelijke massa koord*

l = *lengte van basipunt tot beschouwd punt*

g = *versnelling zwaartekracht*

$\overline{F_H}$ = *const*

$$F_G = F_V = F_S \sin a = a\ l\ g$$

$$\tan a = v'(u) = \frac{F_G}{F_H} = \frac{s\ g}{F_H}\int_0^u \sqrt{1+(v'(u))^2}\,du$$

$$Stel\ a = \frac{F_H}{s\ g}\ dan\ v''(u) = \frac{1}{a}\sqrt{1+(v'(u))^2}$$

$$\Rightarrow \frac{v''(u)}{\sqrt{1+(v'(u))^2}} = \frac{1}{a}$$

$$\begin{cases} Ar\sinh(v'(u)) = \dfrac{u}{a} + C_1 \\ v'(0) = 0\ dus\ C_1 = 0 \end{cases}$$

$$v'(u) = \sinh\frac{u}{a} \Rightarrow v(u) = a\cosh\frac{u}{a} + C_2$$

$$C_2 = 0 \Rightarrow v(u) = a\cosh\frac{u}{a}$$

Transmissielijnen:

een toepassing in de elektrotechniek

Als we een sinusvormig signaal aanbieden aan bijvoorbeeld een coaxiale kabel die gebruikt wordt om de TV aan te sluiten op het kastje van de kabelmaatschappij, dan ontstaan er twee golven in die kabel: een elektrische spanningsgolf en een stroomgolf. Deze twee bepalen samen de *karakteristieke impedantie* (zeg maar weerstand) van die kabel. Zie [**5**]

Pas op: deze impedantie is een eigenschap van de golven in de kabel en onafhankelijk van de lengte van die kabel. Een kabel met de veelgebruikte impedantie van 50 Ohm heeft deze weerstand ongeacht of de lengte 1 meter, 5 meter of 10 meter bedraagt.

Hebben we te maken met een *dissipatieloze* kabel, dat wil zeggen, zijn de energieverliezen

verwaarloosbaar, dan is de karakteristieke impedantie bij benadering:

$$Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Hierin is L de zelfinductie per meter, en C de capaciteit per meter

Op typische elektronica-rekenlinialen, zoals bijvoorbeeld op de Sun Hemmi No. 266 "Electronics", kunnen we een schaal voor deze formule vinden.

Transmissielijnen hebben een bijzondere eigenschap: als we ze aansluiten op een apparaat (zoals de TV) waarvan de ingangsimpedantie gelijk is aan Z_C, dan is de ingangsimpedantie van de kabel ook gelijk aan de karakteristieke impedantie Z_C. De impedantie aan de uiteinden van de kabel wordt als het ware getransformeerd naar de impedantie tussen de ingangsklemmen van de kabel.

Helaas hebben we in de praktijk niet te maken met dissipatieloze transmissiekabels en bovendien hebben we vaak te maken met andere afsluitimpedanties van de kabel. In de radiotechniek wordt een kabel vaak met een afwijkende impedantie afgesloten om speciale effecten te bewerkstelligen.

De algemene formule die de ingangsimpedantie Z_i van een transmissielijn geeft als functie van de afsluitende uitgangsimpedantie Z_u , bevat een hyperbolische tangens:

$$Z_i = Z_C \frac{Z_C + Z_u \tanh g\ s}{Z_u + Z_C \tanh g\ s}$$

Hierin is s de lengte van de kabel en g de door materiaaleigenschappen van de kabel en frequentie van het signaal bepaalde voortplantingsconstante.

Op zich ziet deze formule er niet zo ingewikkeld uit. Helaas zijn alle termen in deze formule complexe getallen, waardoor het berekenen van Z_i in het algemeen een enorm karwei is. Met de hedendaagse digitale computers is de berekening snel en nauwkeurig uit te voeren, maar voordat deze rekenapparaten gemeengoed waren, heeft bovenstaande formule voor veel ingenieurs rekenkundig geploeter betekend. De rekenliniaal zal hierbij vermoedelijk meestal gebruikt zijn voor het uitvoeren van deelberekeningen.

De ingenieur gebruikte hierbij ook diagrammen zoals het *cirkeldiagram van Smith***.** Zie figuur 6. Het cirkeldiagram is in eerste instantie alleen geschikt voor dissipatieloze transmissielijnen, maar er bestaan aanpassingen die het gebruik van het cirkeldiagram ook mogelijk maakten voor dissipatieve transmissielijnen. Deze aanpassingen zijn tevens fraaie toepassingen van hyperbolische functies. Zie [**5**].

Referenties:

[**1**] Peter Hopp: SlideRules, Their History, Models, and Makers,

[**2**] E.T. Bell: The development of Mathematics, McGraw-Hill Book Company 1946,

[**3**] Florian Cajori: A history of mathematical notations, Two Volumes Bound As One, Reprint 1993, Dover Publications,

[**4**] D.J. Struik: Geschiedenis van de Wiskunde, SUA, Amsterdam 1977.

[**5**] W.P. King, H.R. Mimno, A.H. Wing: Transmission Lines, Antennas and Wave Guides, McGraw-Hill Book Company 1945.

Zie hieronder nog het cirkeldiagram van smith

Figuur 6: Het cirkeldiagram van Smith

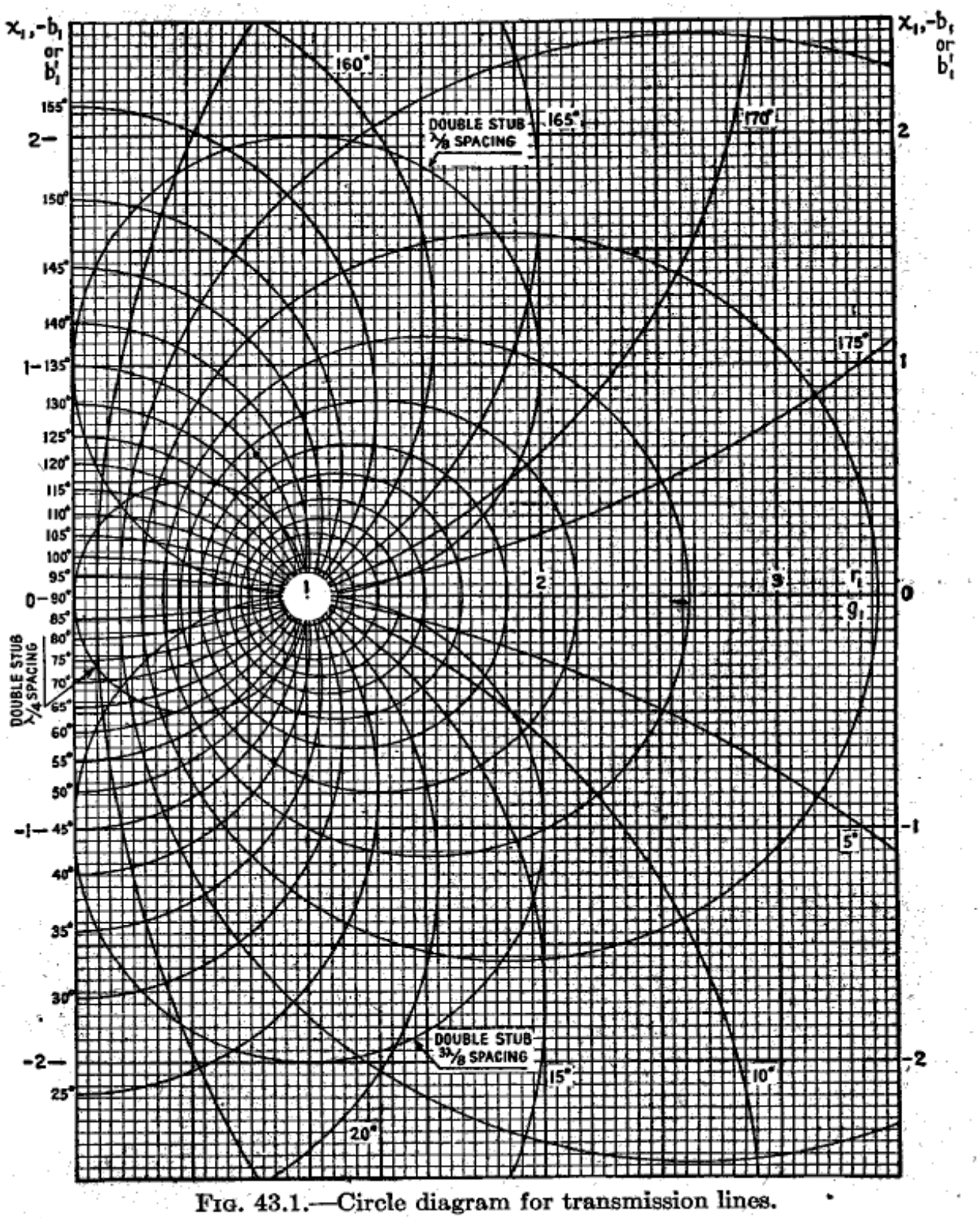


FIG. 43.1.—Circle diagram for transmission lines.

Figuur 6: Het cirkeldiagram van Smith

HYPERBOLIC FUNCTIONS ON SLIDE RULES
and
CIVIL ENGINEERING APPLICATIONS

by Pierre Vander Meulen

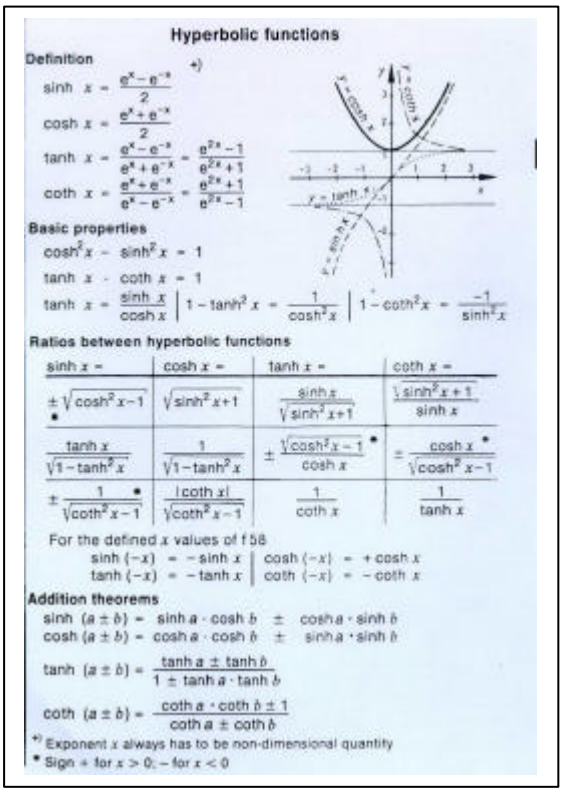
1. PURPOSE OF THIS ARTICLE

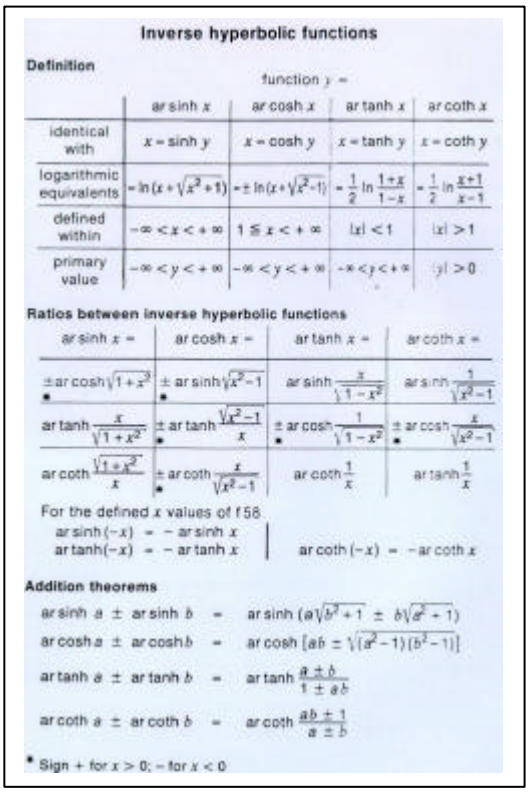
Having read the excellent article "DE KETTINGLIJN EN HYPERBOLISCHE FUNCTIES" presented by Simon van der Salm in the October 2000 MIR 26 edition, I investigated, more carefully, my own slide rules collection in order to find out which one are bearing one or more "hyperbolic scales".

The present article is the result of this investigation and of related subjects. Its purpose is to bring some complementary contribution to Simon's article with another lighting.

2. THE HYPERBOLIC FUNCTIONS

First of all, for the friends collectors who are hooked to the mathematical background, in addition to the formulas already supplied by Simon, here below some general mathematical ratios and theorems relating to these sophisticated functions.





3. THE HYPERBOLIC SCALES AND SLIDE RULES WITH HYPERBOLIC SCALES

THE AVAILABLE FUNCTIONS

As far as I know, the (only) six existing scales relating to hyperbolic functions are:

1. **sinh (x)** in the range [sinh (x) = 0.1→1.0]
2. **sinh (x)** in the range [sinh (x) = 1.0→10.0]

3. **cosh (x)** in the range [cosh (x) = 1.0→10.0]

4. **tanh (x)** in the range [tanh (x) = 0.1→ 1.0]

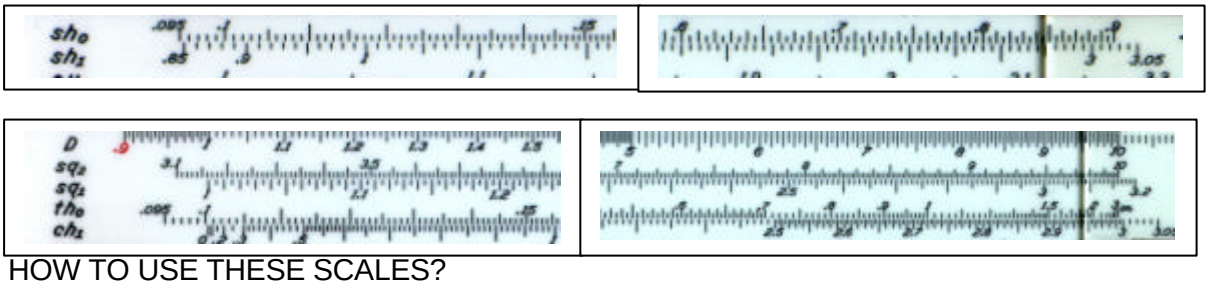
5. **sinh (x) / (x)** in the range [sinh (x) / (x) = 0.1→1.0]

6. **tanh (x) / (x)** in the range [tanh (x) /(x) = 1.0→0.762]

NB. Some slide rules have hyperbolic scales which are not covering the whole range (less or more); see § 0

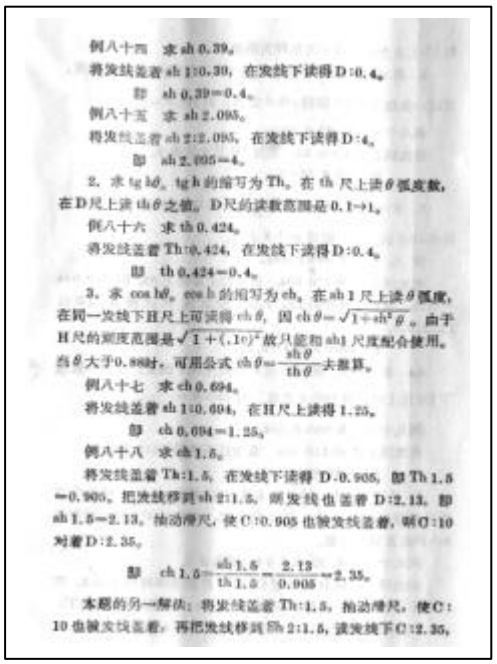
THE SCALES

Here below a partial view of the scales as extracted from the most representative (for hyperbolic functions) slide rule of my collection; the FLYING-FISH 1003.



HOW TO USE THESE SCALES?

For the erudite collectors, I supply here an abstract of the user's manual for the Flying Fish 1015 model …….



例八十四　求 sh 0.39。

將发线盖着 sh 1:0.39，在发线下读得 D:0.4。

即　sh 0.39=0.4。

例八十五　求 sh 2.095。

將发线盖着 sh 2:2.095，在发线下读得 D:4。

即　sh 2.095=4。

2. 求 tg hθ。tg h 的缩写为 Th。在 th 尺上读 θ 弧度数，在 D 尺上读 thθ 之值。D 尺的读数范围是 0.1→1。

例八十六　求 th 0.424。

將发线盖着 Th:0.424，在发线下读得 D:0.4。

即　th 0.424=0.4。

3. 求 cos hθ。cos h 的缩写为 ch。在 sh 1 尺上读 θ 弧度，在同一发线下且尺上可读得 chθ，因 $\mathrm{ch}\,\theta=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\theta}$。由于 H 尺的刻度范围是 $\sqrt{1+(.1c)^2}$ 故只能和 sh1 尺度配合使用。当 θ 大于 0.88时，可用公式 $\mathrm{ch}\,\theta=\frac{\mathrm{sh}\,\theta}{\mathrm{th}\,\theta}$ 去推算。

例八十七　求 ch 0.694。

將发线盖着 sh 1:0.694，在H尺上读得 1.25。

即　ch 0.694=1.25。

例八十八　求 ch 1.5。

將发线盖着 Th:1.5，在发线下读得 D:0.905。即 Th 1.5=0.905。把发线移到 sh 2:1.5，所发线也盖着 D:2.13。即 sh 1.5=2.13。抽动滑尺，使 C:0.905 也被发线盖着，则 C:10 对着 D:2.35。

即　$\mathrm{ch}\,1.5=\frac{\mathrm{sh}\,1.5}{\mathrm{th}\,1.5}=\frac{2.13}{0.905}=2.35$。

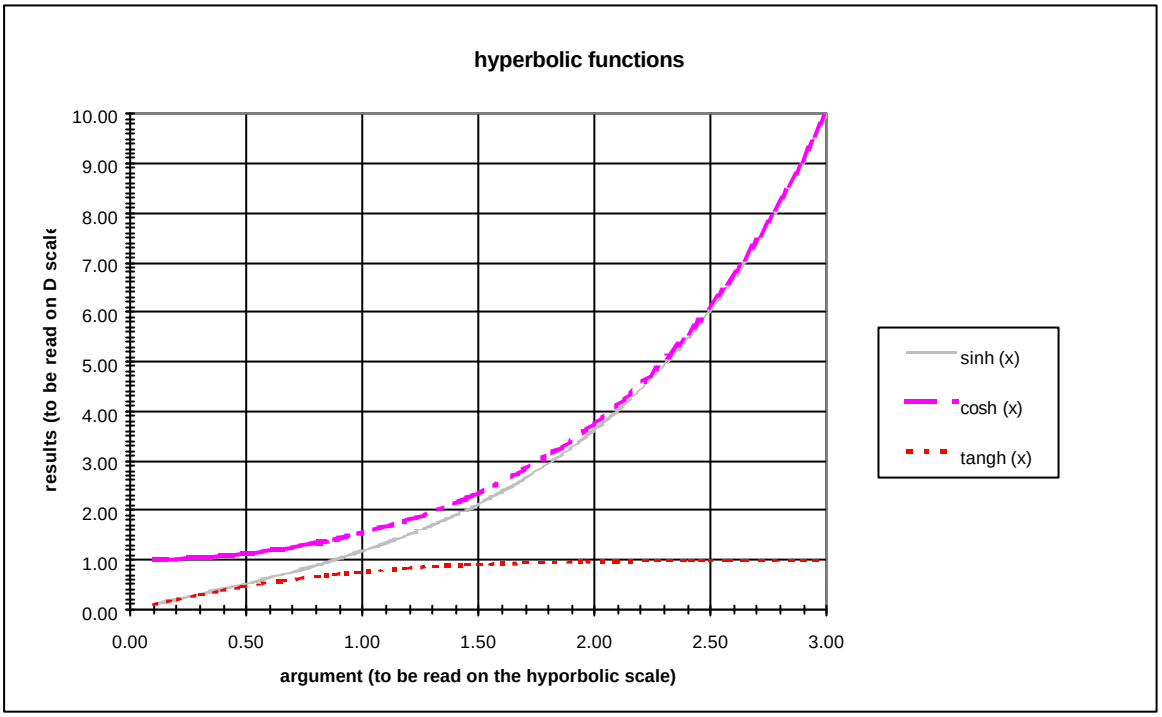
本题的另一解法：將发线盖着 Th:1.5，抽动滑尺，使 C:10 也被发线盖着，再把发线移到 Sh 2:1.5，读发线下 C:2.35。

……for those who have some difficulties in following that text, let us say that the use of the scales is the same as for a conventional trigonometric function : for instance reading "0.80" on scale "th0" and finding "0.66" on scale "D" **[tanh (0.80)** = 0.6640].

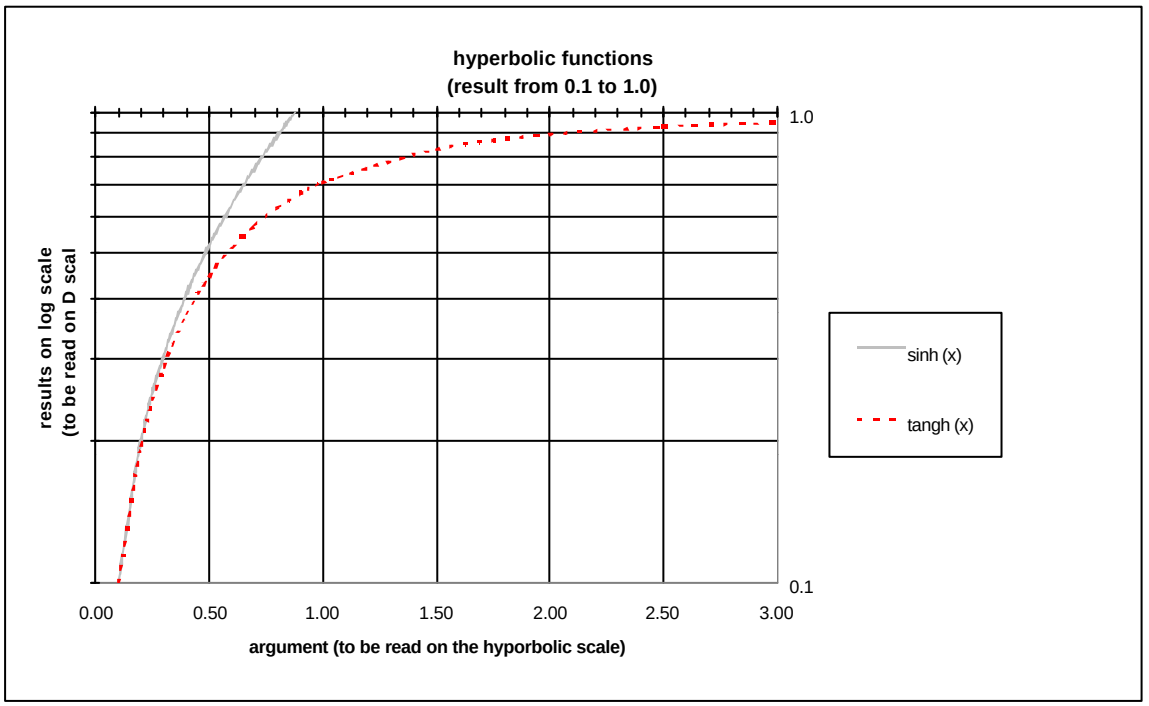
THE FUNCTIONS IN THE RANGE OF THE SLIDE RULES SCALES

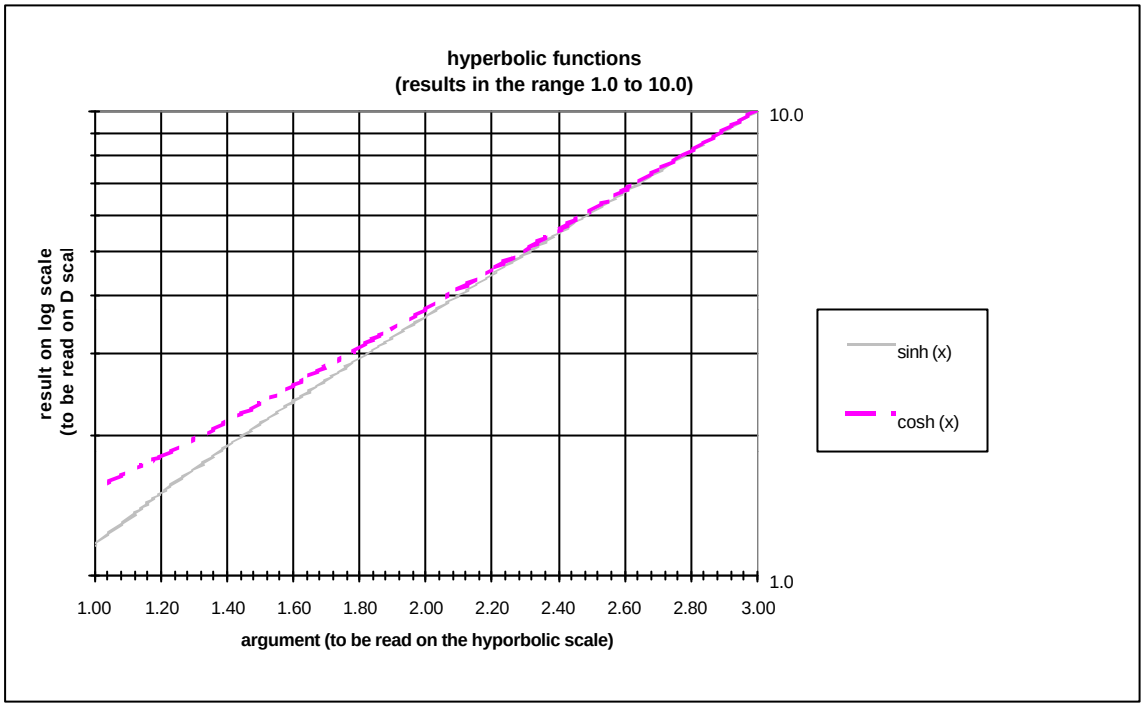
The hyperbolic functions are, on all slide rules, limited by a results range extending on two cycles only (from 0.1 to 1.0 and 1.0 to 10.0), with some exceptions as mentioned in § 0.

The following graph, built on decimal scales, is showing graphically the functions in that range.



The following two graphs are showing the same functions but with the result given on a logarithmic scale which is more in accordance with the way the slide rules scales "D" are built.





Comments

1) For arguments in the range of 2.50 to 3.00 (the results ranging from 6 to 10) the results of the **cosh (x)** and **sinh (x)** are very close (at least by reading on a slide rule); this could be an explanation why the scale **cosh (x)** is rather rare [the **cosh (x)** could nevertheless be obtained indirectly by the equation "**cosh^2(x) = 1 + sinh^2(x)**" or "**cosh (x) = sinh (x) /tanh(x)**"]

2) The **cosh (x)** and **sinh (x)** functions scale are nearly linear on a semi-logarithmic. scale diagram; the D scale is thus well appropriate for such functions.

THE SLIDE RULES

Looking in my collection, I found the following slide rules with the following hyperbolic scales (the symbolism of the scales are reproduced as shown on the slide rules)

Brand	type	Country	Hyperbolic scales				comment
			sinh (x) 0.1 →1.0	sinh (x) 1.0 →10.0	cosh (x) 1.0 →10.0	tanh (x) 0.1 →1.0	
Aristo	0971 hyperbolog	Germany	Sh1	Sh2		Th	
Ding feng	--	China	Sh1	Sh2		Th	
Ding feng	5471	China	Sh1	Sh2		Th	
Ding Feng	5852	China	Sh1	Sh2		Th	
Faber-Castell	2/84 mathema	Germany	sinh x^g	0.1 sinh x^g	0.1 cosh x^g	tanh x^g	**note (1)**

Brand	type	Country	Hyperbolic scales				comment
			sinh (x) 0.1 →1.0	sinh (x) 1.0 →10.0	cosh (x) 1.0 →10.0	tanh (x) 0.1 →1.0	
Flying Fish	1002	China	sh2	sh3		th2	
Flying Fish	1003	China	sh0	sh1	ch1	th0	
Flying Fish	1004	China	Sh1	Sh2	Ch	Th	
Flying Fish	1015	China	Sh1	Sh2		Th	
Haiou Pai	6531	China	Sh1	Sh2		Th	
Haiou Pai	6631	China	Sh1	Sh2		Th	
Hua Fang	--	China	Sh1	Sh2		Th	
Jang	PAT 129	China	Sh (θ)/(θ) **note (2)**	SH **note (2)**		TH **note (2)**	Th(θ)/(θ) **note (2)**
K & E	4083-3	USA	Sh1	Sh2		Th	
Pickett	N 4-ES	USA	Sh1	Sh2		TH	
Sida	1002	China	sh2	sh3		th2	
Sida	1012	China	sh0x	sh1x	ch1x	th0x	
Sida	1015-1	China	Sh1	Sh2		Th	
Sida	1015	China	Sh1	Sh2		Th	
Sida	1083	China	Sh1	Sh2		Th	
Sida	6171	China	sh2	sh3		th2	
Sida	6201	China	sh1	sh2		Th	
Sun Hemmi	255D	Japan	Sh2	Sh1		Th	
Xuesh	6171 bachelor	China	sh1	sh2		th	
Xuesh	6171	China	sh1	sh2		th	

Comments:

1) The above table contents 25 different slide rules; most of them are from China (apparently a country where the hyperbolic functions are rather popular !).
2) Only 4 of them are bearing a **cosh** scale
3) The labelling symbolism is far to be standard, even within the same brand.

4) The two **sinh (x)** scales of the Pickett are located on both sides of a single line (dual-base system).

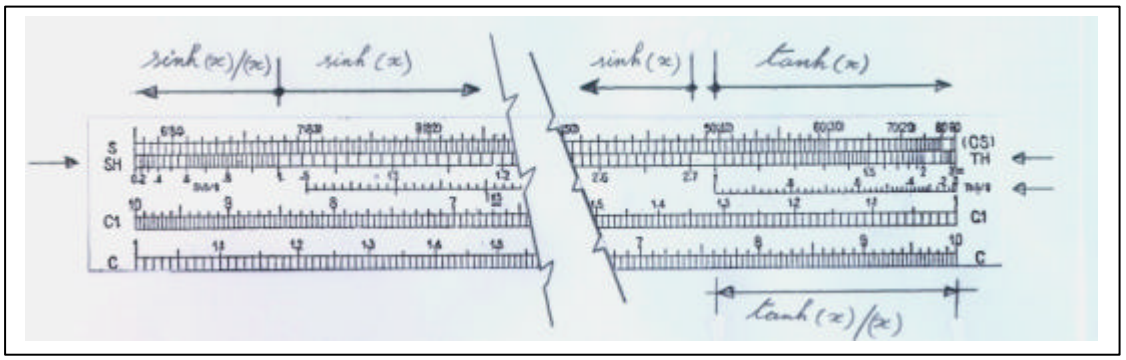
Notes

(1) The Faber-Castell arguments are to be expressed in grads (1/400 th of the circle). This generally induces a boring complication. Furthermore, the basic scale C (labelled "y" on the FC 2/84) having a physical length of 200 mm, is largely extended on both sides. This leads to results ranging from 0.065 to 15 (arguments of **sinh (x)** ranging from 0.065 up to 3.40), which is more than on any other slide rule.

(2) The Jang bears 4 scales but it looks like two scales only. The reason is that one scale (developped on the full length of the 1 cycle C scale), is in fact the juxtaposition of three different scales: with a discontinuity at 2.7.

- **Sinh (x) / (x)** for (x) lower than 1.0,
- **Sinh (x)** for (x) between 1.0 and 2.7
- **Tanh (x)** for (x) between 1.0 and ∞ (close to 3)

Another scale is dedicated to **tanh (x) / (x)** for (x) between 1.0 and ≈ 0.



4. SOME TYPICAL ENGINEERING PROBLEMS WHERE USING THE HYPERBOLIC FUNCTIONS

In addition to the well known chain (cable) case, they are in the field of the civil and/or mechanical engineering, several others interesting cases where the hyperbolic functions are playing a major role.

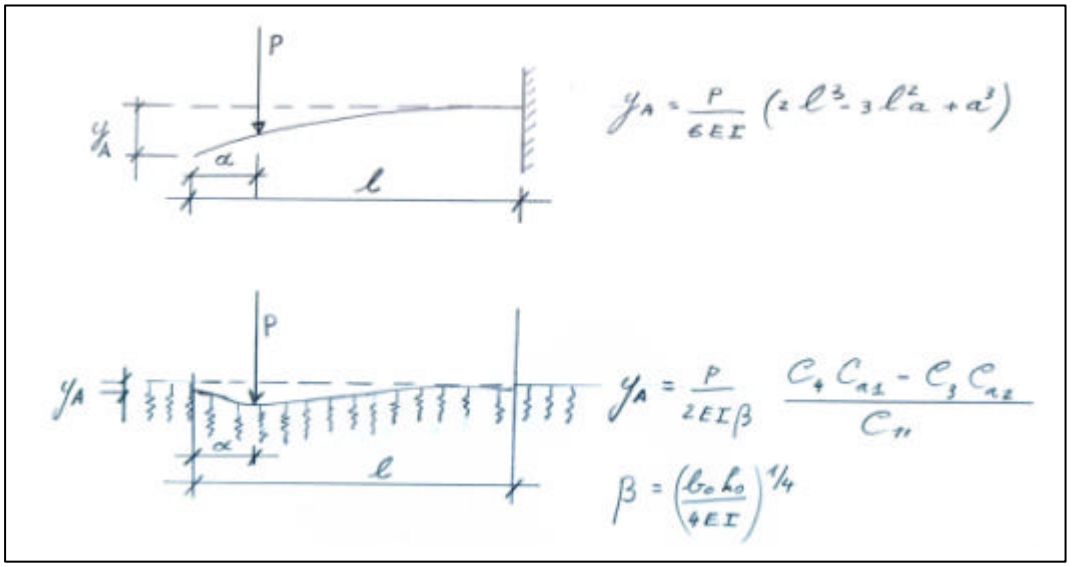
BEAMS ON ELASTIC SOIL (FOUNDATIONS)

Comparing a standard beam problem (as a cantilever beam) with a beam on elastic soil, the difference lies mainly in the supports which are discrete and stiff in the first case and nearly continuous and elastic in the second case. This makes the solution of such a problem much more complicated and requires the use of a huge amount of intermediate calculations involving all kinds of hyperbolic functions.

The example shown below, comparing a standard beam with one on elastic soil, asks, to just find out the deflection at the origin, the computation of the following intermediate data:

- C_4 = **cosh (bl)** * sin (βl) -**sinh (bl)** * cos (βl)
- C_{a1} = **cosh (b(l - a))** * cos (β(l-a))
- C_3 = **sinh (bl)** *sin (βl)

- C_{a2} = **cosh (b(l - a))** * sin (β(l-a)) + **sinh (b(l - a))** * cos (β(l-a))
- C_{11} = **sinh^2 (bl)** - sin^2 (βl)
- The beam's parameters b, E, & I relate to the width, elasticity modulus and moment of inertia.
- The soil's parameter k relates to the soil reaction modulus (expressed in N/mm^3).

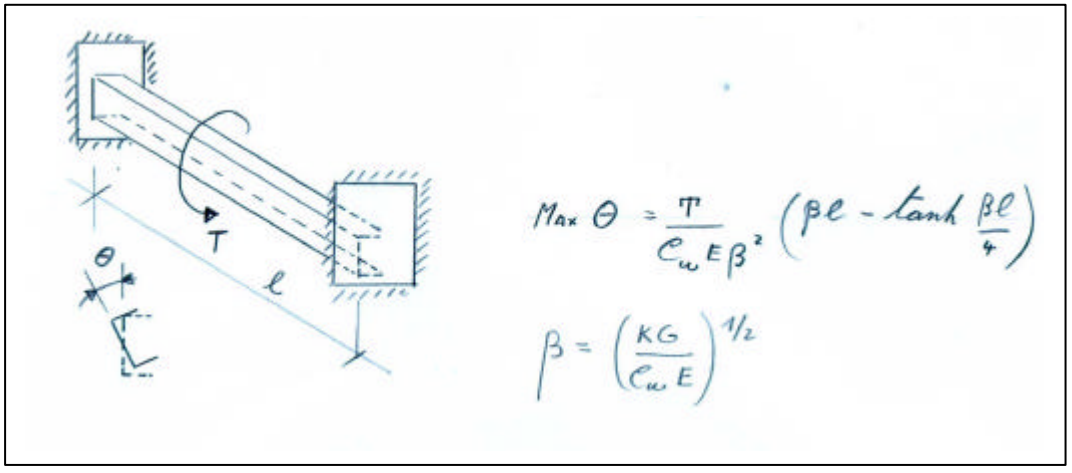


TORSION

Torsion stress calculation is a rather simple problem for a circular bar loaded by equal and opposite twisting couples, applied at its ends.

When the bar is not circular (as a for a U shape section) and when one or both ends are fixed, the formulas are much more sophisticated.

The example given here below deals with a channel bar fully fixed at both ends (no twist or wrap allowed).

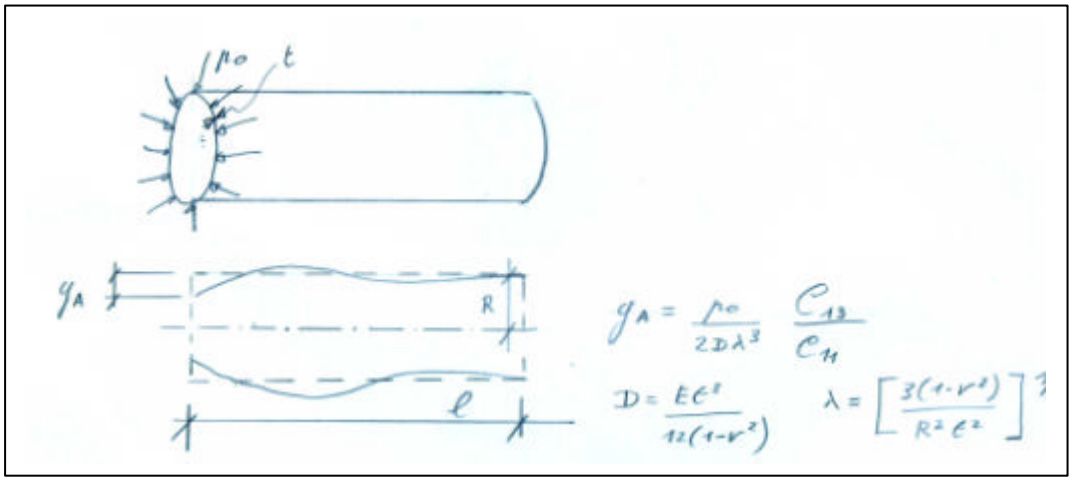


THIN WALLED CYLINDRICAL SHELLS (TUBE)

Even for axisymmetric loadings the equations are not simple. They are based on differential equations similar in form to those used to develop the formulas for beams on elastic soil.

The example given here below deals with a tube loaded by an uniform distributed radial end load. The deflection determination at the end asks for the computation of the following intermediate data:

- C_{11} = **sinh^2 (λl)** - sin^2 (λl)
- C_{13} = **cosh (λl)** * **sinh (λl)** - cos (λl) * sin (λl)
- The parameters ν and E are the Poisson's coefficient and the elasticity modulus.

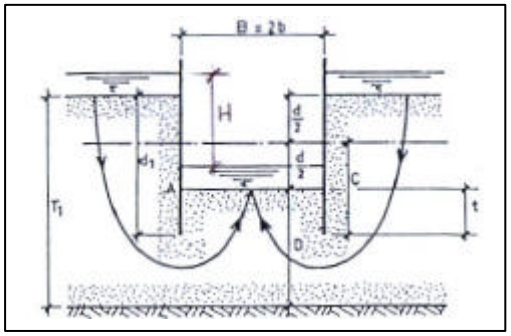


WATER FLOW IN THE GROUND

A typical problem of water flow in the ground is the one of a sheetpiling wall *[palplanches - damwand]* retaining both the ground and the water acting on and in the retained ground. The computation of the water flow passing through the soil and filling the excavation is a function of the geometry of the system as well as of the soil layers geometry and permeability characteristics.

The flow per linear meter is computed by the formula $q = (2kH/\pi) * \psi_b$

where ψ_b has to be determined by the formula $b/d = -1/\pi * (\mathbf{sinh}\ \mathbf{y_b}\ /\sin \varphi_c + \mathbf{y_b})$

φ_c has to be determined by the formula $c/d = -1/\pi * (\cot g\ \varphi_c + \varphi_c)$

k is the soil permeability (expressed in m/sec)