Kustnavigatie met Plaatspasser of Snelliuspunt

Otto van Poelje

Inleiding

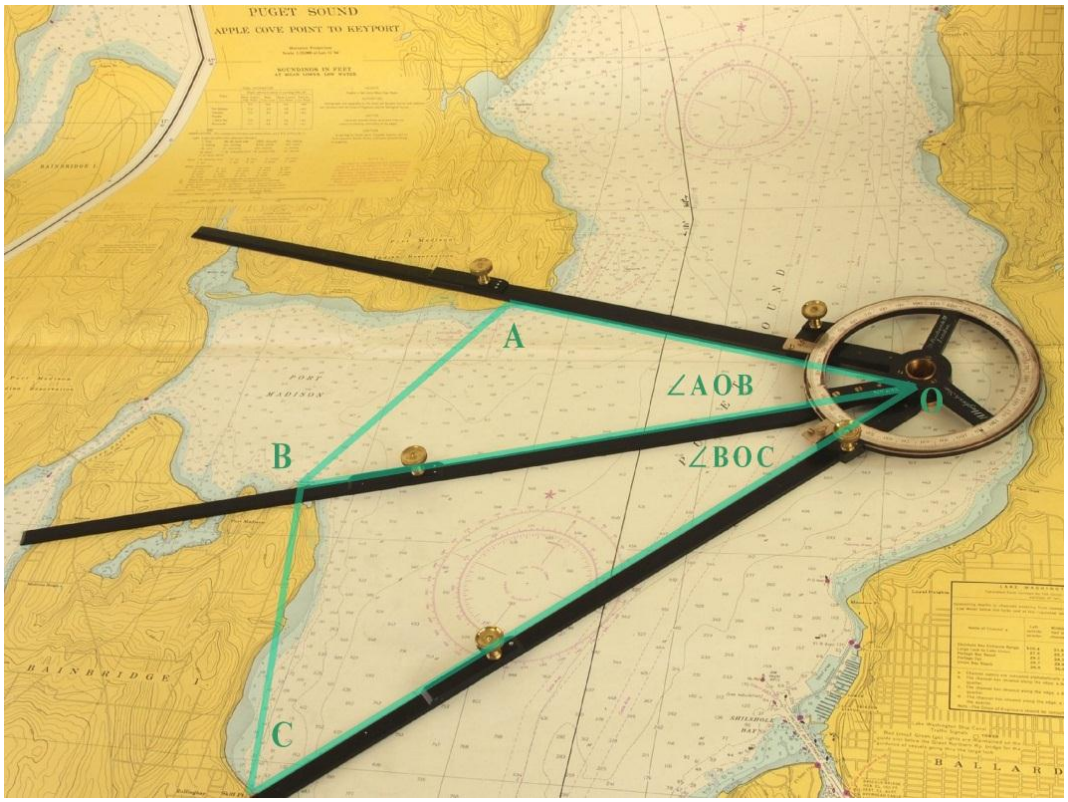
Bij navigatie op zee is de kust zowel vriend als vijand: vijand door het gevaar van stranding, maar vriend door de mogelijkheid van plaatsbepaling met behulp van zichtbare oriëntatiepunten op de kustlijn.
Bijvoorbeeld overdag met kerktorens, of vuurtorens ‘s nachts.
Een van de teken- en reken-instrumenten, die hiervoor kunnen worden gebruikt, is de “plaatspasser” (in het Engels: “station pointer” of “three-way protractor”). Dit is een drie-armige goniometer (hoekmeter, vroeger ook “transporteur” genoemd), waarmee twee aangrenzende hoeken kunnen worden uitgezet op de zeekaart.

De Plaatspasser

Durk Rienstra was zo vriendelijk het getoonde instrument uit te lenen om er foto's van te maken voor mijn "image gallery" (in wording) van interessante rekeninstrumenten; in feite was dat de aanleiding tot dit artikel.
Deze Engelse plaatspasser is gemaakt door H. Hughes & Son in de eerste helft van de vorige eeuw. Om de doos klein te houden, is elk van de drie lange hoekbenen in tweeën deelbaar. De gradenschaal van 0 tot 360º, op de zilverkleurige ring, is verdeeld tot op hele graden, maar er bestaan complexere exemplaren met micrometer-instellingen en van loepen voorziene Vernier-schaaltjes die tot op hele boogminuten verdeeld zijn.
Dit exemplaar behoorde - gezien het opschrift op de doos - tot de uitrusting van een Nederlands marineschip, het 75 meter lange flottieljevaartuig Soemba van de Floresklasse, dat dienst heeft gedaan van 1926 tot 1956 (tijdens de oorlog in actieve geallieerde dienst).

Principe van de Plaatspasser

Op de kust bevinden zich meestal zichtbare oriëntatiepunten, die op grootschalige kustkaarten duidelijk worden aangegeven om peilingen vanuit zee mogelijk te maken.
De meest eenvoudige manier is de 2-punts kompaspeiling via het vizier ("pelorus") van het peilkompas op de brug: kompaspeilingen van 2 verschillende punten kunnen op de kaart met een parallelliniaal vanuit de kompasroos naar de peilpunten worden gebracht om de positie van het schip te markeren op de kaart. Als een 2-punts kompaspeiling niet nauwkeurig genoeg is vanwege kompasfouten of een beweeglijk schip, kunnen *drie* zichtbare oriëntatiepunten A, B en C op de kustlijn worden gebruikt om vanuit het observatiepunt O de onderlinge hoeken ∠AOB en ∠BOC te meten met een horizontaal gehouden sextant.
Onderstaande figuur geeft een voorbeeld op een zeekaart van *Puget Sound* aan de oostkust van de Verenigde Staten, vlak boven Seattle. De oriëntatiepunten zijn A = *Pt. Jefferson*, B = *Pt. Monroe* en C = *Skiff Pt*. De twee gemeten hoekwaarden worden ingesteld op de buitenbenen van de plaatspasser ten opzichte van het binnenbeen dat vast staat op de 0º positie van de cirkelschaal. Op deze manier vormen de zijden van de benen een analogon van de twee meetdriehoeken op de kaart.
Het is opletten dat altijd de *afgeschuinde radiale* meetkanten van de benen worden gebruikt, welke voor de bovenste in de figuur een afwijkende plaats heeft! De posities van de benen worden gefixeerd door de twee schroeven op de buitenbenen, bij de schaalring, aan te draaien.
Nu kan de zo ingestelde plaatspasser op de kaart worden gelegd in die positie waarbij de meetkanten van de drie benen de respectievelijke oriëntatiepunten A, B en C raken: het middelpunt van de plaatspasser (kruis of inkeping) zal dan het observatiepunt O markeren op de kaart.



Gebruik van de Plaatspasser

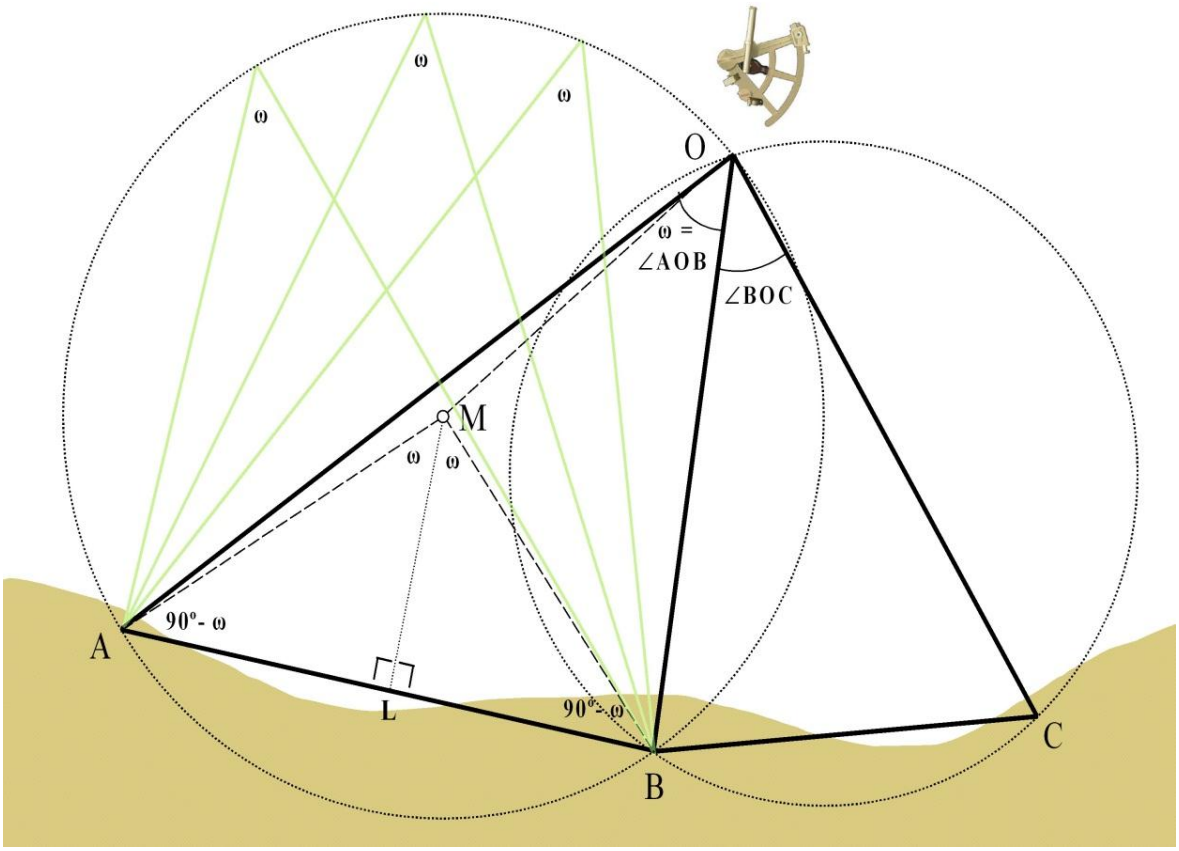
Met bovenstaande simplistische gebruiksaanwijzing wordt het gebruik van de plaatspasser in de literatuur meestal beschreven, maar de methodiek om dit te bereiken wordt zelden vermeld. Het willekeurig plaatsen en draaien van de passer tot alle drie lijnen passen lijkt niet handig. Een van de drie benen op zijn oriëntatiepunt tegelijk laten schuiven en draaien is ook niet gemakkelijk. De beste methode is die, waarbij slechts één soort beweging is toegestaan om het observatiepunt te bereiken, zonder "trial and error": het onderste been wordt langs punt C gelegd en met een vinger daarop gehouden, en daarna wordt de hele plaatspasser om C gedraaid tot het middelste been punt B raakt. De onderste driehoek OBC is dus met de correcte hoek OBC op de kaart gezet. Nu is het de kunst om de plaatspasser te verschuiven met twee handen op zo'n manier, dat midden- en onderbeen de respectievelijke punten B en C *blijven* raken; dit totdat ook het bovenbeen zijn raakpunt A bereikt. In de praktijk kan deze beweging worden ondersteund door geleiding langs twee pennen of punaises door de kaart, op de punten B en C.
De beweging, die het middelpunt van de plaatspasser-ring hierbij maakt, blijkt een cirkel te zijn.

De Meetkundige Plaats van Gelijke Tophoeken

In de trigonometrie is bekend, dat de *omgeschreven cirkel* van een driehoek OAB een straal heeft, die berekend kan worden uit de rechthoekige driehoek AML (waarbij ML de middelloodlijn is van AB):

$$R_{AOB} = \frac{\tfrac{1}{2}\,\mathrm{AB}}{\sin(\angle \mathrm{AOB})}$$

Dit betekent dat de omgeschreven cirkel alleen afhangt van de basislengte AB en de tophoek ∠AOB, en *niet* van de positie van de tophoek ∠AOB (deze tophoek noemen we in het vervolg ω). Daarom kan de top C zich verplaatsen over de *meetkundige plaats* (*MP*) *van constante tophoeken* ω, welke wordt gevormd door de omgeschreven cirkel (zie de diverse lichtgroene tophoeken in onderstaande figuur). De positie van het middelpunt M van deze meetkundige plaats is bepaald in de rechthoekige driehoek AML.
De tweede meetkundige plaats, de omgeschreven cirkel in driehoek OBC, kan op soortgelijke wijze worden bepaald. De twee snijpunten van de cirkels om OAB en OBC geven respectievelijk het bekende punt B en het gevraagde observatiepunt O.



Nauwkeurigheid van 3-Punts Plaatsbepaling

De nauwkeurigheid van de hoeken, die op de kaart worden afgezet, hangt af van de gebruikte sextant en zijn aflezing, en van de instelling van de plaatspasser. Ook al zijn sommige instrumentcirkels verdeeld tot op boogminuten, toch zal de uiteindelijke hoeknauwkeurigheid van passerbenen op de kaart vaak niet beter zijn dan ¼ graad.
Een grotere bijdrage aan de onnauwkeurigheid kan echter ontstaan door een ongelukkige keuze van de punten A, B en C. De hoek, waaronder de twee *MP* cirkels elkaar snijden, zal de grootste nauwkeurigheid opleveren rond 90º; naarmate deze hoek kleiner wordt, zal het snijpunt meer beïnvloed worden door onnauwkeurigheden in de beenhoeken. In het extreme geval overlappen beide cirkels elkaar (één cirkel door A, B, C en O), en zal er geen oplossing mogelijk zijn. Wanneer er meer keuzemogelijkheden zijn voor de punten A, B en C, zijn er enkele vuistregels, zoals: gebruik grote hoeken (meer dan 30º, samen tot 180º), kies punt B dichter bij de waarnemer dan A en C.
Een controle op de nauwkeurigheid kan bestaan uit meting van een vierde punt, waaruit een derde MP cirkel wordt geconstrueerd, die niet teveel mag afwijken van het eerder bepaalde snijpunt O.

Alternatieven van de Plaatspasser

Getekende plaatspasser: als een plaatspasser niet voorhanden is, kan hij voor een gegeven situatie op een groot stuk doorzichtig papier getekend worden met behulp van een gradenboog: 3 lijnen die elkaar kruisen onder de twee gemeten tussenhoeken zijn voldoende, want dit stuk papier kan op dezelfde manier als een echte plaatspasser op de kaart over de punten A, B en C worden gemanoeuvreerd.
Er zijn natuurlijk ook andere methodes voor berekening van driepunts metingen dan het schuiven met een plaatspasser.
Grafisch: een puur grafische methode bestaat uit het construeren van de meetdriehoeken met omgeschreven cirkels op de zeekaart zelf (of op een opgelegd stuk doorzichtig papier). De voorgaande afbeelding van de *MP* cirkels kan als volgt worden geconstrueerd met passer en gradenboog.
De lijnen AB en BC worden getrokken door de oriëntatiepunten A, B en C. Daarna wordt met een gradenboog vanuit A een hoek 90º - ω uitgezet ten opzichte van AB, en evenzo vanuit B een hoek 90º - ω ten opzichte van BA. Deze twee lijnen kruisen elkaar in het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van driehoek OAB, en deze cirkel kan nu met de passer getekend worden.
Ter controle kan de middelloodlijn van AB worden geconstrueerd door met een passer vanuit A en B elkaar kruisende cirkelboogjes te trekken: de middelloodlijn door deze kruispunten moet M ook snijden, omdat de rechthoekige driehoeken AML en BML gelijkvormig zijn, met gelijke zijden en hoeken.
Op dezelfde wijze wordt de omgeschreven cirkel van driehoek OBC geconstrueerd. Eén van de twee snijpunten (uiteraard *niet* B) van beide cirkels geeft de gevraagde positie O van de waarnemer.
In vroeger tijden, toen er nog geen gradenbogen bestonden, konden hoeken ofwel met parallel linialen vanuit een kompasroos worden verplaatst, ofwel met behulp van een koordenschaal (“Chords”) op *Gunter liniaal* of *pleinschaal* worden geconstrueerd.

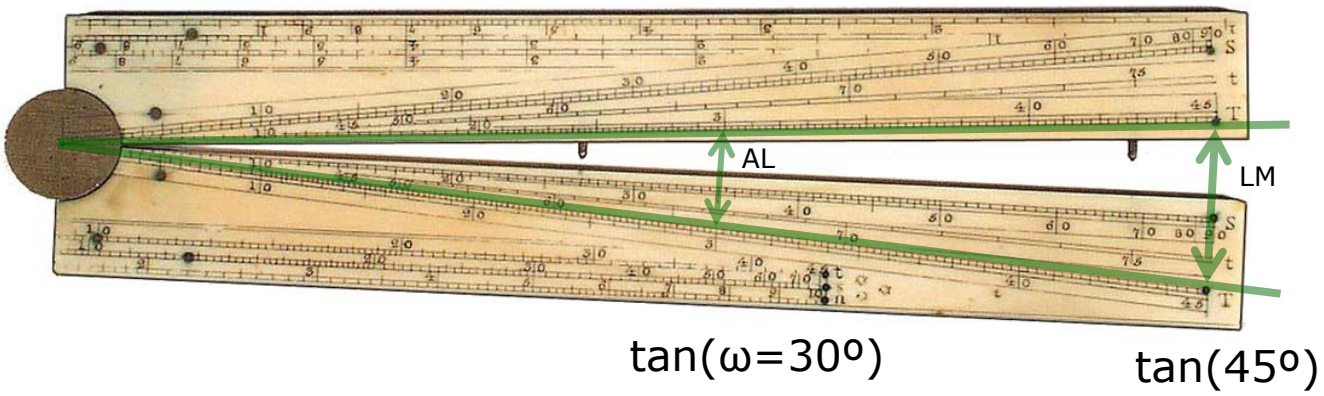
Dit waren grafische methoden, waarbij *niet* numeriek gerekend werd.
Rekenmethode: in de rechthoekige driehoek ALM kunnen de lengtes van de onbekende zijden AM en LM berekend worden uit de zijde AL = ½ AB en de tophoek ω:

$$AM = \frac{\mathrm{AL}}{\sin(\omega)} \text{ en } LM = \frac{\mathrm{AL}}{\tan(\omega)}$$

Als een van deze zijden berekend wordt, kan het middelpunt M direct geconstrueerd worden op de kaart, ofwel vanuit A door kruisen van straal AM met middelloodlijn, ofwel vanuit L door afzetten van LM op de middelloodlijn.
De berekening kan vandaag den dag op een *calculator* uitgevoerd worden, of logaritmisch op een *rekenliniaal* (lang geleden), of op een *Gunterschaal* (heel lang geleden). Behalve de twee hoekwaarden is hierbij ook een numerieke lengte-eenheid nodig: het meest logisch is om hiervoor de kaartschaal te gebruiken, dat wil zeggen dat met de passer de afstand AL op de kaartschaal in zeemijlen of minuten wordt afgelezen voor de berekening.
Proportionaalpasser: het is frappant dat nog langer geleden, vóór de 17^{e} eeuw, dit probleem al was op te lossen, zonder plaatspasser, zonder gradenboog en zonder numerieke berekeningen.
Hiervoor kon de klassieke proportionaalpasser (met een gewone kaartpasser en liniaal) worden gebruikt, mits hij was voorzien van respectievelijk een *sin* of een *tan* schaal. Het recept is simpel: om het middelpunt M te construeren met behulp van de lengte van LM, wordt eerst weer op AB de middelloodlijn door L geconstrueerd; daarna wordt de afstand AL = ½ AB tussen de kaartpasserpunten genomen, en de proportionaalpasser wordt zover uitgebogen, dat de schaalwaarden voor tan(ω) op de T-schaal van beide benen een onderlinge afstand hebben van AL (afgemeten met de zojuist ingestel-

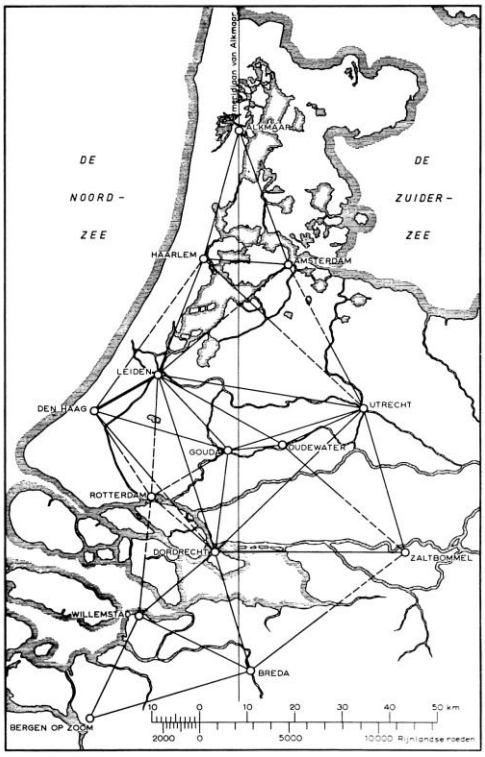
de kaartpasser). Dan wordt de kaartpasser opnieuw ingesteld tussen de punten tan(45º) = 1 op beide benen, en daarmee is LM op de kaartpasser beschikbaar om op de kaart de middelloodlijn uit te zetten van L naar middelpunt M.
Over de twee tangens-schalen T op de proportionaalpasser zijn in feite twee congruente driehoeken gecreëerd, met de volgende verhoudingen tan(ω) : tan(45º) = AL : LM, zie onderstaande figuur met ω = 30º als voorbeeld.

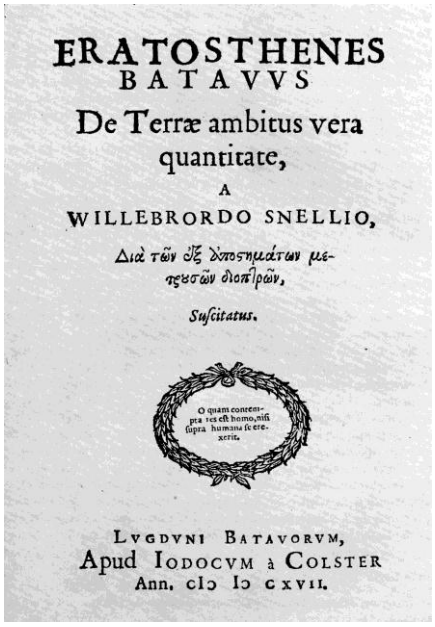
Als de hoek ω > 45 zou zijn, wordt de volgorde iets anders omdat in dat geval de complementaire hoek moet worden gebruikt, met de verhoudingen tan(90º - ω) : tan(45º) = LM : AL.



Het Snelliusprobleem van “Achterwaartse Snijding”

John Vossepoel attendeerde mij er op (met veel suggesties voor deze paragraaf en uitgebreide documentatie), dat de maritieme plaatspasser een zelfde probleem oplost als de *achterwaartse snijding* in de landmeetkunde. Hieraan is verbonden de naam van de Nederlandse wiskundige *Willibrord Snellius* (1580 –1626), die de eerste grootschalige triangulatie (zichtmetingen in een net van driehoeken) uitvoerde in Nederland, tussen Alkmaar en Bergen op Zoom; zijn doel was de lengte te bepalen van een deel van de meridiaan door Alkmaar om uiteindelijk met deze lengte en het verschil in breedte tussen de eindpunten de omtrek van de aarde nauwkeurig te kunnen berekenen, in “Rijnlandse Roeden”. De triangulatie is beschreven in zijn boek “Eratosthenes Batavus”, 1617.




ERATOSTHENES
BATAVVS
De Terræ ambitus vera quantitate,
A
WILLEBRORDO SNELLIO,
Διὰ τῶν ὀξ ὑπομιάτων μετρήσεων διοπτρῶν,
Suscitatus.
O quam contemptæ res est homo, nisi supra humana se erexerit.
LVGDVNI BATAVORVM,
Apud IODOCVM à COLSTER
Ann. clɔ Iɔ cxvii.

Enkele van zijn hoekmetingen in Leiden waren verricht vanaf een dakplat op zijn eigen huis, dat niet voldoende waarneembaar was vanuit andere triangulatiepunten. Daarom voerde Snelllius twee hoekmetingen uit vanaf zijn dak “achterwaarts” naar reeds berekende triangulatiepunten (de Hooglandse kerk, het Leidse stadhuis en de Pieterskerk), en berekende daaruit de coördinaten van zijn huis, het naar hem vernoemde “Snelliuspunt”. Dit is de eerste gedocumenteerde toepassing van de “Achterwaartse Snijding” (Engels: “resection”).
In de landmeetkunde kunnen hoeken veel nauwkeuriger dan op zee worden bepaald, met stationair opgestelde theodolieten, voor de Wild T2 zelfs tot op enkele boogseconden. Om die reden zijn grafische constructies, zoals met de plaatspasser, zelden toegepast op land. De oplossing van het Snelliusprobleem wordt meestal gegeven als rekenschema’s - vaak op invulformulieren - en uitgedrukt in de per land gebruikelijke decimale rechthoekige coördinaten, dit in tegenstelling tot de sexagesimale hoekcoördinaten in de zeenavigatie. In handboeken voor landmeetkunde worden verschillende constructies en algoritmes gegeven voor het Snellius probleem, b.v. van *Cassini* (constructie met twee cirkels, zoals hiervoor beschreven), van *Collins* (constructie met één cirkel), of de methode met *barycentrische coördinaten* (puntcoördinaten langs de hoogtelijnen in een driehoek). In totaal schijnen ruim 500 oplossingen te bestaan voor het Snelliusprobleem.
Op internet is een fraaie animatie te vinden, waarin de gekozen 3 oriëntatiepunten A, B en C en de positie van de waarnemer O zichtbaar worden gemaakt, en in onderling verband verschoven kunnen worden, zie http://www.ottmarlabonde.de/L1/RWE.Applet1.html. De getoonde cirkel is de omgeschreven cirkel van A, B en C, de gevarenzone waar het punt O niet meer uit de metingen bepaals kan worden.
Bovendien laat deze animatie de nauwkeurigheid zien door middel van een puntenwolk van 1000 gesimuleerde hoekmetingen met een nauwkeurigheid van ± 0.002 grad (ongeveer 6½ boogseconden). Hoe dichter de wolk, hoe nauwkeuriger de bepaling van het Snelliuspunt.

Historie van de Plaatspasser

Volgens D. Baxandall[5] is de plaatspasser uitgevonden door de Engelse hydrograaf, cartograaf, ondernemer en uitvinder J. Huddart, F.R.S,,1741-1816, bekend onder andere door een uitgebreide routebeschrijving naar de *East Indies*, (“The Oriental Navigator”, 1801), en door zijn kaarten van Saint George’s Channel, de Tigris en West-Sumatra. Hij werd in 1791 *Fellow of the Royal Society*.
De station pointer van Huddart is alleen bekend uit een artikel in Nicholson’s Journal[6], 1804.
In feite heeft echter de Engelse hydrograaf Murdoch Mackenzie, F.R.S., 1712-1791, (die de titel *Maritime Surveyor in his Majesty’s Service* heeft gedragen, en sinds 1774 ook *Fellow of the Royal Society* was) al veel eerder de *station pointer* beschreven, en het instrument deze naam gegeven. Hij is bekend onder andere door zijn nauwkeurige zeekaarten rond de Orkney eilanden in 1801. Mackenzie was de eerste, die in 1774 een boek publiceerde dat specifiek
gericht was op de wetenschap en de techniek van *Maritime Surveying*; hierin was de beschrijving[7] van de station pointer opgenomen (zie afbeelding rechts). Omdat zijn publicatie bijna 30 jaar vóór Huddart plaatsvond, moet Mackenzie als uitvinder van de station pointer worden beschouwd.

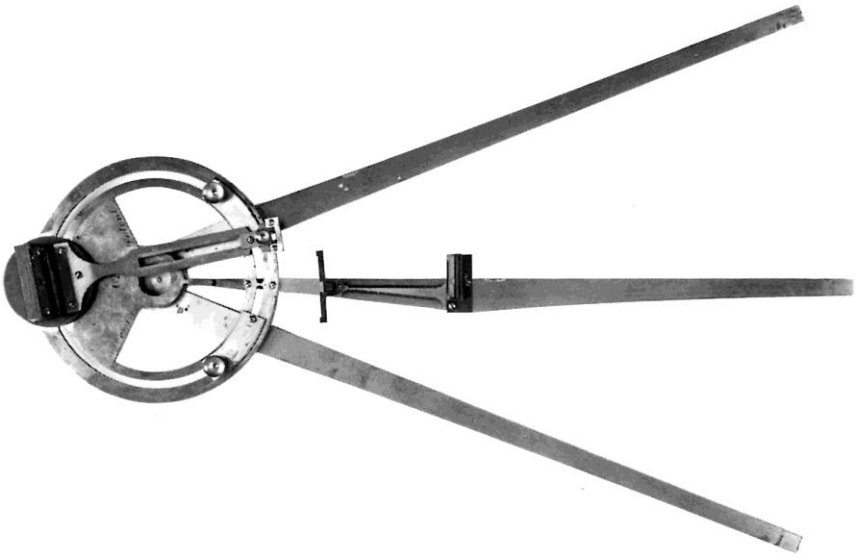
The Point S may be readily laid down on a Draught, by drawing on a loofe tranſparent Paper indefinite Right-lines S A, S B, S C, at Angles equal to thoſe obſerved; which being placed on the Draught ſo as each Line may paſs over, or coincide with, its reſpective Object, the angular Point S will then coincide with the Place of Obſervation. Or,

Provide a graduated Semicircle of Braſs, about 6 Inches in Diameter, having three Radij with chamfered Edges, each about 20 Inches long, (or as long as it may be judged the Diſtance of the Stations from the three given Objects may require) one of which Radij to be a Continuation of the Diameter that paſſes through the Beginning of the Degrees on the Semicircle, but immoveably fixed to it, the other two moveable round the Center, ſo as to be ſet and ſcrewed faſt to the Semicircle at any Angle. In the Center let there be a ſmall Socket, or Hole, to admit a Pin for marking the central Point on the Draught. When the ſloped Edges of the two moveable Radij are ſet and ſcrewed faſt to the Semicircle, at the reſpective Degrees and Minutes of the two obſerved Angles, and the whole Inſtrument moved on the Draught until the Edges of the three Radij are made to lie along the three ſtaſimetric Points, each touching its reſpective Point, the Center of the Semicircle will then be in the Point of Station S; which may be marked on the Draught, through the Socket, with a Pin. Such an Inſtrument as this may be called a *Station-pointer*; and would be found convenient for finding the Point of Station readily and accurately, except when the given Objects were near; when the Breadth of the Arch, of the Radij, and of the Braſs about the Center of the Semicircle might hinder the Points to be ſeen, or the Radij to be placed ſo as to comprehend a very ſmall Angle between them.

PROB.

[5] Baxandall, D., Nicholson, W., *The Inventor of the Station Pointer*, Oxford University Press, 1933
[6] Nicholson, W., *A Journal of Natural Philosophy, Chemistry and The Arts*, Vol. VII, Jan. 1804, Art. I
[7] Mackenzie, M., *Treatise of Maritime Surveying*, 1774, p. 24

De eerste plaatspassers waren meer bedoeld voor het verzamelen van hydrografische gegevens op zeekaarten dan voor de kustnavigatie zelf. Met name de diepte-aanduidingen op kustkaarten moesten met grote nauwkeurigheid in positie worden genoteerd. De hoekmetingen werden door de hydrografen niet met (horizontaal gehouden) navigatiesextanten uitgevoerd, maar met speciale nauwkeurige hoekmeetinstrumenten (lodingssextanten, “sounding sextants”). Sommige versies konden de twee benodigde hoeken gelijktijdig – van groot belang op varende schepen – meten: de dubbele lodings-sextant.
De overdracht van gemeten hoeken naar de plaatspasser was een tijdrovende en foutgevoelige bezigheid. Daarom zijn er ook combinatie-instrumenten ontwikkeld, waarbij de optische assen van de hoekwaarnemingen langs de passerbenen liepen, zie onderstaande afbeelding[8]: dan hoeft de waarde van de gemeten hoeken (louter een tussenresultaat) in principe niet genoteerd te worden!



249 ‘McCombie’s position finder’, unsigned but by Hughes & Son, who were sole makers and agents (Hughes & Son, 1904), *c.*1900 A combined sounding sextant and station pointer. Cambridge, Whipple Museum.

Voor kustnavigatie is de klassieke plaatspasser geen essentieel instrument: het bewerkelijke overzetten van gemeten hoeken naar plaatspasser, en het grote benodigde oppervlak op de kaartentafel zijn bezwaarlijk bij het gebruik.
Toch zijn plaatspasser nog steeds te koop, vaak in veel goedkopere (en kleinere) plastic uitvoeringen, zoals de 30 dollar plaatspasser van Starpath, (zie http://www.starpath.com/catalog/accessories/1861.htmop), maar ook duurdere metalen uitvoeringen (zie het 450 dollar exemplaar van Celestaire op: http://www.celestaire.com/vmchk/New-and-Sale-Items/Professional-Station-Pointer/vmj_estore.tpl.html

[8] Bennet, J.A., *The Divided Circle*, Phaidon - Christie’s, 2007, p. 207