Boekbespreking: ‘De Rekenmeester’, door Dieter Jörgensen

Simon van der Salm

In 1534 vertrekt Tartaglia naar Venetië om zijn wiskundige kennis aan te bieden aan rijke kooplieden. Zijn hevige stotteren vormt een aanzienlijke belasting bij het uitoefenen van zijn werk. Jörgensen schetst op overtuigende wijze het moeizame leven van Tartaglia, tegen de achtergrond van het welvarende Renaissance Venetië.

Introductie

Tijdens het jaarcongres van de NVvW, dat in november in Veenendaal plaatsvond, en waar de KRING ook acte de préséance gaf, werd er tweedehands een interessant boek aangeboden voor degenen die geïnteresseerd zijn in de geschiedenis van de rekenkunde en de wiskunde: *De Rekenmeester* van Dieter Jörgensen. Dit boek is een geromantiseerde biografie van de zestiende-eeuwse wiskundige Tartaglia (1499-1557). Jörgensen belicht de vijftien tumultueuze jaren (1543-1548) van Tartaglia in Venetië, waarin het oplossen van derdegraads vergelijkingen, ook wel kubieke vergelijkingen genoemd, een centrale rol speelt.

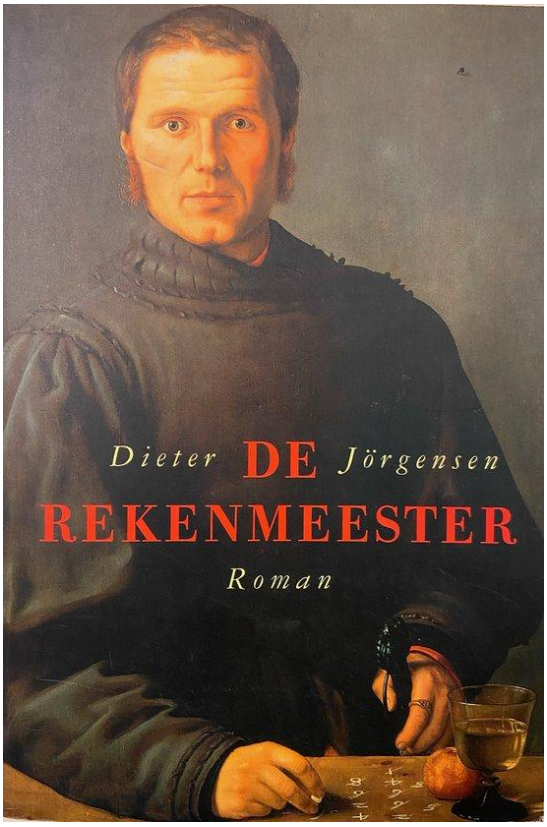

Fig. 1. De voorkant van de editie van het boek uit het jaar 2000 (de editie van 2019 toont een uitsnede hiervan) toont een afbeelding van een schilderij van de hand van Barthel Beham dat een rekenmeester uitbeeldt. Het schilderij beeldt echter niet de hoofdpersoon Niccolò Tartaglia uit!

Rekenmeester Niccoló Tartaglia

Niccolò Tartaglia was een Italiaanse wiskundige, boekhoudkundig rekenmeester en militair ingenieur, beroemd om zijn bijdragen aan zowel de algebra als de ballistiek. In zijn roman onthult Jörgensen, door middel van innerlijke monologen, het complexe, eenzame en ambitieuze karakter van Tartaglia. Deze moeilijke persoonlijkheid leidde tot heftige conflicten met vakgenoten en een confrontatie met de Inquisitie.

De auteur schetst een levendig beeld van het bedrijvige en welvarende Venetië. Gedurende de late middeleeuwen en de renaissance vormden de Joden een belangrijke economische en intellectuele groep. Tegelijkertijd waren zij echter blootgesteld aan vooroordelen en beperkingen. Ze waren actief in sectoren die door Christenen als riskant of immoreel werden beschouwd, zoals het verstrekken van leningen met rente. Voor hun berekeningen huurden zij rekenmeesters in. In Jörgensens boek speelt deze context een prominente rol, vooral in het kader van Tartaglia's hartstochtelijke maar verboden relatie met een Joodse vrouw.

De stotteraar

Tartaglia, wiens echte naam (waarschijnlijk) Nicolò Fontana was, werd geboren in 1499 in Brescia, Italië. *Tartaglia* betekent *de stotteraar*, wat verwijst naar zijn spraakgebrek. Tijdens het Franse beleg van Brescia (46.000 mensen vermoord!) in 1512 liep hij ernstige verwondingen aan zijn hoofd op door de zwaardslagen van een soldaat. Deze misbruikte zijn moeder terwijl zij, samen met haar zoontje, de kathedraal was ingevlucht. Zijn moeder redde zijn leven, maar door de verwondingen aan zijn keel, gezicht en schedel kon Tartaglia de rest van zijn leven alleen nog stotterend en stamelend spreken.

Ingenieur en wiskundige van de nieuwe wetenschap

Tartaglia was een autodidact die zijn kennis voornamelijk ontleende aan het beroemde *Summa de Arithmetica, Geometrica, Proportioni e Proportionalità* van *Luca Pacioli*. In dit werk ontdekte hij fouten in de berekeningen met betrekking tot kubische vergelijkingen. Daarnaast vertaalde hij de *Elementen* van *Euclides* in het Italiaans en schreef hij een belangrijk boek over ballistiek en fortificatie.

Fig. 2. Eén van de bekendste afbeeldingen van Tartaglia (met passer) die altijd een zware baard had en een hoofddeksel droeg om zijn littekens te verbergen. Bron: Wikipedia.

Een van Tartaglia's bekendste werken uit zijn Venetiaanse tijd is *La Nova Scientia*, uit 1537. Dit werk vergaarde beroemdheid vanwege zijn behandeling van de wiskundige principes van de ballistiek. In de *Nova* legt Tartaglia de fundamenten van de moderne mechanica, die later cruciaal zouden blijken voor de natuurkunde en techniek. Hij introduceerde wiskundige technieken en geometrische modellen om de trajecten van projectielen te analyseren (zie figuren 3 en 4). Jörgensen beschrijft indringend hoe moeizaam de *Nova* tot stand kwam.

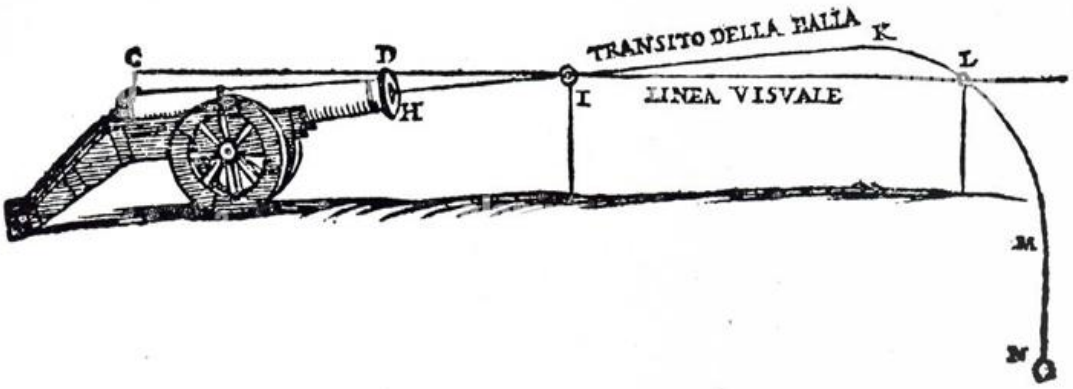

Fig. 3. Afbeelding die laat zien dat Tartaglia nog niet de paraboolbaan van projectielen kende. Uit de Nova Scientia.

Een belangrijk aspect van de *Nova* is de combinatie van wiskunde en praktische toepassingen. Tartaglia biedt inzicht in de gevolgen van zijn theorieën in de echte wereld, wat zijn werk relevant maakte voor ingenieurs. Een dergelijk praktisch boek was toentertijd ongebruikelijk; wetenschappers hielden zich doorgaans niet bezig met de toepassingen van hun abstracte theorieën, die voortkwamen uit het filosofische werk van Aristoteles, gecanoniseerd door de Katholieke Kerk. Iemand die de moed had om hiervan af te wijken, riskeerde snel in aanraking te komen met de Inquisitie, die bijzonder geïnteresseerd was in Tartaglia's opvattingen over de kogelbaan, aangezien die afweken van de bewegingswetten van Aristoteles. Dankzij zijn scherpzinnigheid en de steun van hogere kerkelijke functionarissen wist Tartaglia vervolging en de brandstapel te ontlopen.

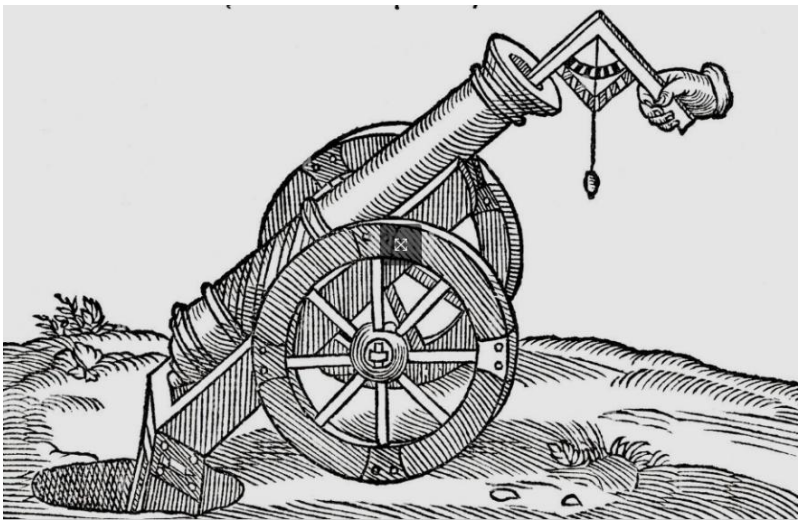

Fig. 4. Afbeelding met hoekmeting uit de Nova Scientia van Tartaglia.

De wedstrijd tussen Fior en Tartaglia

In de zestiende eeuw organiseerden wiskundigen openbare wedstrijden om complexe vraagstukken op te lossen. De uitdager stelde dertig vraagstukken op die de uitgedaagde binnen een bepaalde tijd moest oplossen. Dit had vaak aanzienlijke gevolgen: de verliezer verloor niet alleen zijn lucratieve functie als rekenmeester voor rijke handelaren of als hoogleraar, maar moest ook een kostbaar diner organiseren voor dertig hooggeplaatste en veeleisende genodigden en werd soms zelfs gedwongen het land of stadstaat te verlaten.

De wedstrijd tussen Fior en Tartaglia is beroemd geworden en maakte Tartaglia bekend binnen het wetenschappelijke milieu van Europa. In 1536 werd hij, inmiddels inwoner van Venetië, uitgedaagd door de met hem concurrerende rekenmeester *Antoniomaria Fior*, die dertig vraagstukken bij de notaris deponeerde. Toen Tartaglia deze onder ogen kreeg, bleek dat ze allemaal vergelijkingen van de vorm $x^3 + px = q$ waren, met p en q positieve gehele getallen (negatieve getallen waren nog onbegrijpelijk voor zestiende-eeuwers). Tartaglia realiseerde zich dat de middelmatige Fior in het geheim een oplossingsmethode moest hebben ontvangen (of gestolen) van zijn leraar *Scipione del Ferro,* die enkele jaren eerder was overleden. Koortsachtig ging Tartaglia op zoek naar een methode om deze vergelijkingen zelf op te lossen. Vlak voor het verstrijken van de termijn ontdekte hij een geometrische oplossing: de *gnomon (aanwijzer) van Tartaglia*. Hiermee loste hij de vraagstukken in enkele uren algebraïsch op. Het eindresultaat was 30-0, een erkenning dat hij tot de grootste wiskundigen van zijn tijd behoorde. Jörgensen beschrijft in zijn biografie op indringende wijze hoeveel mentale inspanning het Tartaglia kostte om deze methode te ontdekken.

Deze wedstrijd zou enkele jaren later op een onvoorspelbare manier een vervolg krijgen: was hij wel de eerste die een derdegraads vergelijking kon oplossen? Deel 3 van Jörgensen's biografie behandelt deze vraag.

Conflict met Gerolamo Cardano

Het conflict tussen Tartaglia en *Cardano*, van 1538 tot 1548, is een fascinerende episode in de geschiedenis van de algebra. Tartaglia was een arme rekenmeester en privédocent in Venetië, terwijl Cardano (1501-1576) (eindelijk, want hij was ook een moeilijk type!) een gerespecteerde lector was, bekend om zijn bijdragen aan de algebra en de kansrekening. Jörgenson beschrijft uitvoerig de strijd om de prioriteit van de ontdekking van de oplossingen van derdegraads vergelijkingen tussen deze twee titanen.

Fig. 5. Portret van Jerome Cardan, in het Italiaans Gerolamo Cardano (Cardanus Hieronymus), Italiaanse arts, wiskundige, filosoof en astroloog (Pavia). Bron: https://mathcenter.oxford.emory.edu/site/math117/jeromeCardan/.

De meningsverschillen tussen Niccolò Tartaglia en Gerolamo Cardano over de prioriteit van de ontdekking van de oplossingsmethode voor derdegraads vergelijkingen escaleerden in de loop der jaren steeds verder. Tartaglia weigerde zijn methode openbaar te maken, omdat hij deze in een eigen boek wilde publiceren, wat hem veel eer en geld zou opleveren. Cardano, die geïnteresseerd was in Tartaglia's werk voor eveneens een wiskundeboek dat hij aan het schrijven was, verzocht hem om zijn methode toch bekend te maken. Tartaglia stemde toe op de voorwaarde dat Cardano het geheim voorlopig niet zou onthullen. Cardano besloot echter om hem toch openbaar te maken in zijn boek *Ars Magna* (1545), waarin hij zowel zijn eigen werk als de methoden van anderen opnam. Dit leidde tot een openlijke breuk tussen de twee wiskundigen. Tartaglia voelde zich zeer verbolgen over de schending van hun overeenkomst. De situatie escaleerde verder toen Tartaglia ontdekte dat Cardano ook de oplossingsmethode van Scipione del Ferro, de mentor van nota bene verliezer Antoniomaria Fior, beschreef.

Cardano was van mening dat hij de eed niet had geschonden. In 1543 reisde hij, samen met zijn veelbelovende student *Ludovico Ferrari,* die later zelfs vierdegraads vergelijkingen kon oplossen, naar Bologna om het aantekeningenboek van Scipione del Ferro te bestuderen. Daaruit bleek duidelijk dat Tartaglia niet de eerste was die derdegraads vergelijkingen kon oplossen, waardoor Cardano zijn belofte aan Tartaglia niet had geschonden. Tartaglia was enkel in staat om een heel specifieke klasse van derdegraads vergelijkingen op te lossen, terwijl Cardano zelf al beschikte over een veel algemenere oplossingsmethode. De beroemde oplossingsformule wordt daarom ook terecht de *formule van Cardano* en niet die van Tartaglia genoemd. Jörgensen beschrijft indrukwekkend hoe Tartaglia nog lange tijd verzet bleef bieden. Tartaglia vocht zijn strijd uit met venijnige brieven vol beledigingen, maar moest na verloop van tijd toch toegeven dat hij had verloren.

Conclusie

De Rekenmeester van Jörgensen is een boeiend verhaal over een wetenschapper die ondanks een grote handicap in staat was tot uitzonderlijke wetenschappelijke prestaties. Het boek volgt de inspanningen van Tartaglia om een buitengewone bijdrage aan de wiskunde te leveren, tegen de intrigerende achtergrond van de Renaissance in Venetië, een periode van bloeiende handel en wetenschappelijke vooruitgang. Kortom, een aanrader voor iedereen die geïnteresseerd is in de geschiedenis van rekenen en wiskunde.

De rekenmeester, door Dieter Jörgensen. Uitgever: Novecento Amsterdam-Compiano, 2019. ISBN 978-94-91126-08-6/NUR 302.

NAWOORD

Het boek eindigt met drie tekeningen, waarvan één de gnomon van Tartaglia is. Historisch gezien verwijst de term 'gnomon' (Grieks voor 'aanwijzer') naar een tijdaanduider in de astronomie en architectuur. In de wiskunde van de zestiende eeuw en daarvoor betekent 'gnomon' een figuur die, wanneer een specifiek gedeelte ervan wordt verwijderd en aan een andere figuur wordt toegevoegd, deze laatste figuur vergroot tot een kwadraat of een kubus.

Helaas biedt Jörgensen geen enkele uitleg over de wiskundige achtergrond van deze gnomon, terwijl een aanzienlijk deel van zijn verhaal specifiek draait om de opmerkelijke ontdekking die Tartaglia deed. Het is belangrijk om te onthouden dat Tartaglia, net als bijna iedereen in zijn tijd, redeneringen vanuit een geometrisch perspectief hanteerde; de algebra was nog in een pril stadium van ontwikkeling. Eerst ontdekte Tartaglia de bijzonderheid van de kubus in figuur 6, en pas daarna paste hij verschillende lijnstukken, oppervlakten en volumes toe om (specifieke) derdegraads vergelijkingen op te lossen.

Tartaglia liet zijn gnomon daadwerkelijk vervaardigen door een timmerman, en met behulp van verschillende kleuren gaf hij de verschillende blokken weer, vergelijkbaar met de onderstaande figuur 6. Gerolamo Cardano komt de eer toe om de formulering van de oplossing algemener te maken, waardoor deze meer lijkt op de moderne analytische afleiding die hieronder wordt gepresenteerd. Echter, Cardano zou vermoedelijk deze hedendaagse vorm niet herkennen als feitelijk zijn eigen afleiding!

Volledige vergelijking

Algebraïsch gaan we bijvoorbeeld als volgt te werk. We onderzoeken de vergelijking van de derde graad: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, waarbij de coëfficiënten *a*, *b* en *c* reële getallen zijn. Merk op, dat hier de coëfficiënt van de derde macht gelijk is aan 1. Dat doet niet af aan de algemene geldigheid van de hierna volgende oplossing. Zo'n formule wordt *monische vergelijking* genoemd.

Genormeerde vergelijking

De translatie $x = y - \frac{1}{3}a$ levert de getransformeerde vergelijking $y^3 + py + q = 0$ op, met

$p=-\frac{1}{3}a^2+b$ en $q=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c$. In deze eenvoudiger vergelijking ontbreekt het kwadraat van de onbekende en te vinden waarde *y*!

Discriminant *D* ≥ 0

Voorlopig veronderstellen voor de discriminant geldt:

$$D=\left(\frac{1}{2}q\right)^2+\left(\frac{1}{3}p\right)^3\geq 0 \qquad (1)$$

Zie voor de volgende, *algebraïsche afleiding,* figuur 6.

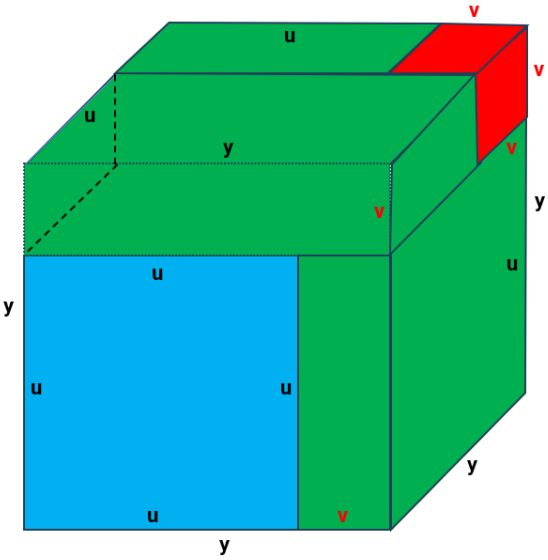

Fig. 6. De gnomon van Tartaglia. Deze ruimtelijke figuur vertoont overeenkomende karakteristieken met de welbekende gnomon van Al-Khwarizmi, waarmee de abc-formule kan worden afgeleid door het afsplitsen van het kwadraat. Zie ook de laatste pagina in het boek van Jörgensen.

Als we voor de ribbe van de omhullende kubus stellen $y=u+v$, dan gaat de vergelijking $y^3=-py-q$ over in:

$$y^3=(u+v)^3=u^3+(3uv)y+v^3 \qquad (2)$$

Merk op, dat $3(uvy)=(3uv)y$ de totale inhoud is van de drie identieke groene balken. Kennelijk is $3uv=-p$ en dus:

$$u^3v^3=-\frac{1}{27}p^3 \qquad (3)$$

En tevens:

$$u^3+v^3=-q \qquad (4)$$

Merk op, dat u^3 de inhoud is van de blauwe kubus en v^3 de inhoud van de rode kubus; de inhoud van de totale kubus is $(u+v)^3$.

De formules (3) en (4) zijn twee vergelijkingen met twee onbekende derde machten. We kunnen de onbekende *v* elimineren: $u^3(-q-u^3)=-\frac{1}{27}p^3$, waaruit de volgende vierkantsvergelijking in u^3 volgt:

$$\left(u^3\right)^2+q\left(u^3\right)-\frac{1}{27}p^3=0 \qquad (5)$$

Symmetrisch kunnen we ook zo'n zelfde vierkantsvergelijking voor *v* opstellen. Het eerste paar oplossingen (*u*,*v*) van de twee vierkantsvergelijkingen is:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} \\ v_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} \end{cases} \tag{6}$$

Hieruit volgt de reële *x*-waarde als oplossing van de volledige vergelijking:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} - \frac{1}{3}a \tag{7}$$

Dit is de formule die Cardano vond. Het betreft hier reële worteltrekkingen, waarbij de derde-machtswortel uit een negatief reëel getal vooralsnog uitsluitend een negatief reëel getal is. De twee oplossingen u_1 en v_1 zijn dus positieve of negatieve reële getallen. Maar er blijken totaal drie oplossingen te zijn, zoals we tegenwoordig weten!

Voorbeeld *a* = -1, *b* = -1, *c* = -2, *D* > 0

We voeren de gegevens in in een moderne rekenmachine, de Texas Instruments Nspire CX CAS (Computer Algebra Systeem) en krijgen we met formule (7) het volgende resultaat. Zie figuur 7.

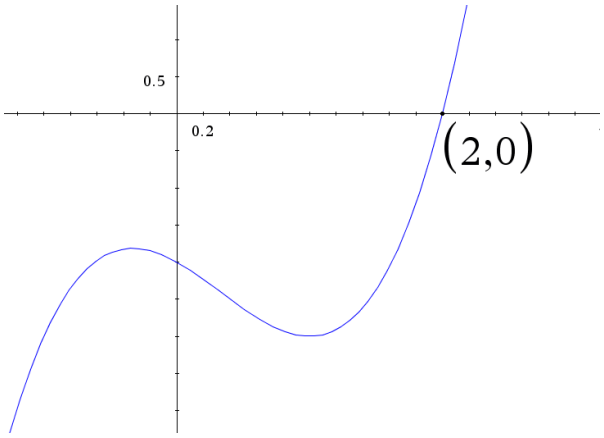

Fig. 7. Voorbeeld met D > 0.

De discriminant *D* is positief en de oplossingen van $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ zijn: $\begin{array}{l} x_1 = 2{,}0 \\ x_2 = -0{,}50 - 0{,}87\,\mathrm{i} \\ x_3 = -0{,}50 + 0{,}87\,\mathrm{i} \end{array}$

Er is één reële oplossing die het snijpunt is van de functie $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ met de *x*-as. En er blijken twee complexe oplossingen te zijn die Tartaglia en Cardano nog niet kenden, maar wel vermoedden. Merk op, dat de twee complexe oplossingen elkaars toegevoegde zijn.

De oorsprong van complexe getallen
We zien hier een historisch belangrijk gevolg van de methode van Tartaglia en Cardano: de oorsprong van de complexe getallen.

Imaginaire getallen
In de zeventiende eeuw introduceerde René Descartes de term *imaginaire getallen*, hoewel hij deze niet als volwaardige getallen beschouwde. Dit leidde tot een eindeloze stroom misverstanden over wortels uit negatieve getallen, die hun oorsprong vonden in de hierboven beschreven oplossingsmethode van Cardano.

In de achttiende eeuw breidden wiskundigen zoals John Wallis en Abraham de Moivre de definitie en het begrip van complexe getallen verder uit. Carl Friedrich Gauss maakte aan het begin van de negentiende eeuw aanzienlijke vorderingen op dit terrein in zijn werk *Die Grundlagen der Analysis*. Hij introduceerde het idee dat complexe getallen een geometrische interpretatie hebben in het complexe vlak, waarbij de x-as de reële as en de y-as de imaginaire as vertegenwoordigt. Gauss was de eerste die de notatie voor complexe getallen in de vorm $a + bi$ gebruikte, waarbij i de imaginaire eenheid is met de eigenschap dat $i^2 = -1$. Deze ontwikkelingen hebben geleid tot een dieper begrip van de rol van complexe getallen in de wiskunde en hun toepassingen in diverse gebieden, zoals de natuurkunde en de techniek.

Kwantumfysica
Complexe getallen worden sinds het begin van de twintigste eeuw toegepast in diverse disciplines, waaronder de elektrotechniek. Een relatief nieuwe toepassing vindt men in de kwantumfysica, waar complexe getallen een cruciale rol spelen. In de kwantummechanica worden veel concepten, zoals golffuncties, en formules, zoals de Schrödingervergelijking, uitgedrukt met behulp van complexe getallen.

Over Cardano
Gerolamo Cardano (1501-1576) was een bijzonder veelzijdig geleerde wiens werk aanzienlijke invloed heeft gehad op verschillende wetenschappelijke disciplines. Zijn leven kende echter ook veel persoonlijke en professionele drama's. Cardano was een van de eerste wetenschappers die zich met kansrekening bezighield. Dit was geen toeval, aangezien gokken in kroegen en bordelen zijn voornaamste bron van inkomsten vormde. Door zijn levensstijl had hij voortdurend te maken met geldzorgen en schulden. Ook de kosten van de vele rechtszaken die tegen hem werden gevoerd, droegen hieraan bij.
Naast zijn bijdragen aan de wiskunde was Cardano arts en leverde hij belangrijke bijdragen aan de geneeskunde, met name op het gebied van geestelijke gezondheid. Hij was bovendien geïnteresseerd in astrologie en schreef verschillende werken over dit onderwerp, wat in die tijd een breed geaccepteerde praktijk was. Dit bracht hem in ernstige problemen toen hij de horoscoop van Jezus trok. Hij werd vervolgd door de Inquisitie en liep het risico op de brandstapel te eindigen wegens blasfemie. Desondanks blijft zijn erfenis in de wetenschap en de wiskunde van groot belang.

Bron van deze laatste alinea's: *Cardano of het handboek van de kwantum-astroloog,* door BROOKS, M. Vertaling: Catalien van Paassen, Omniboek Utrecht, 2017.