

### Een Duitstalige ontdekking

De geschiedenis van de logaritme van Napier en logaritmen in het algemeen is al lange tijd een van mijn interessegebieden. Bij toeval ontdekte ik op de Duitse website van Amazon het boek *Die wagemutige Erfindung der Logarithmentafeln* (2024) van Klaus Truemper, dat voornamelijk gaat over de ontdekking van logaritmen door Jost Bürgi. Zie figuur 1 en referentie Truemper (2024) [1].



Tot dat moment had ik nog nooit van deze auteur gehoord en ging ik ervan uit dat hij Duitser was. Echter, Andries de Man mailde me dat dit boek de Duitse vertaling is van een Amerikaans werk, *The Daring Invention of Logarithm Tables*, gepubliceerd in 2020. Ondanks zijn Duitse naam blijkt Klaus Truemper een gepensioneerde Amerikaanse hoogleraar in de wiskunde te zijn.

**Fig. 1.** De titelpagina van de Duitse versie van het boek van Klaus Truemper.

De (trigonometrische) logaritme van Napier heb ik onder andere besproken in MIR 91. Het is echter ook interessant om het werk van Bürgi over logaritmen onder de loep te nemen en dit te vergelijken met dat van Napier. Hoe werkte de logaritme van Bürgi precies? Of, beter gezegd, hoe functioneert de *anti*-logaritmetafel van Bürgi? Bürgi creëerde namelijk geen logaritmetabel zoals wij die gewoonlijk kennen, zoals bijvoorbeeld de tabel van Briggs, waarin je een getal in de marge opzoekt om vervolgens de bijbehorende logaritme af te lezen. Bij Bürgi werkt het precies andersom: de marges van zijn tabel bevatten logaritmen (bij hem zijn dat uitsluitend gehele exponenten, in het **rood** aangeduid) en je zoekt het bijbehorende getal (dat is hier een macht met een specifiek grondtal, in het **zwart**) in de tabel op.

Natuurlijk maakt de volgorde op zich niet veel uit, hoewel het opzoeken in de tabel van Bürgi – is mijn ervaring – iets meer moeite kost omdat je vaker moet bladeren (zelfs in Excel) om de juiste waarde te vinden dan bijvoorbeeld in de standaard tabel van Briggs die we tot ongeveer 1975 hebben gebruikt. In feite fungeert de tabel van Bürgi dus als een *anti*-logaritmetafel. In dit artikel bespreek ik hoe de tabel van Bürgi is opgebouwd en hoe deze kan worden gebruikt bij het maken van berekeningen. Hierbij volg ik deels de uitleg van Klaus Truemper. Zie Truemper (2024) [1].

### Jost Bürgi in het kort

Jost Bürgi (1552-1632), ook wel bekend als Justus Byrgius, wordt samen met John Napier beschouwd als één van de grondleggers van de logaritmen. Beide wiskundigen ontwikkelden

hun concepten omtrent logaritmen min of meer gelijktijdig en, voor zover men op dit moment weet, onafhankelijk van elkaar. Bürgi moeten we echter tevens zien als een briljant constructeur van wetenschappelijke instrumenten. Het is echter onduidelijk waar Bürgi zijn uitstekende opleiding als instrumentmaker heeft genoten. Zie [2]. Het lijkt erop dat hij de logaritmetafel als een niet al te belangrijk nevenproject beschouwde. Wanneer Bürgi begon met het gebruik van logaritmen, die hij had uitgevonden om zijn astronomische berekeningen te vergemakkelijken, is onbekend; men vermoedt dat dit al rond het jaar 1588 was.

In 1579 trad hij in dienst van de landgraaf van Hessen-Kassel, Wilhelm IV, die zich bezighield met astronomische waarnemingen. Wilhelm IV, die (zeer uitzonderlijk voor iemand van zijn sociale klasse) astronomie en wiskunde had gestudeerd, wilde empirisch bewijs verzamelen voor de juistheid van het Copernicaanse heliocentrische model van het zonnestelsel (1543). Hiervoor waren veel, zeer nauwkeurige waarnemingen nodig. Bürgi werd ingeschakeld om precieze instrumenten voor observaties te bouwen, zoals klokken, sextanten en hemelglobes.

In 1604 werd Bürgi als instrumentmaker benoemd door de Heilige Roomse keizer Rudolf II en vestigde hij zich in Praag. Daar kreeg hij een werkplaats met twee assistenten en werkte hij samen met de beroemde astronoom Johannes Kepler. Het lijkt erop dat Kepler zijn derde wet, die een tweede en derde macht in een quotiënt bevat en daardoor enigszins lastig te berekenen is, ontdekte door samen met Bürgi na te denken over de vereenvoudiging van de berekeningen door middel van logaritmen.

### Invloed van Kepler

Kepler wist Bürgi te overtuigen om zijn oorspronkelijke werk over logaritmen op te schrijven, maar het blijkt dat het manuscript grotendeels door Kepler zelf is geschreven. De logaritmetafel van Bürgi – die feitelijk een *anti*-logaritmetafel is – werd in 1620 gepubliceerd, zes jaar na de publicatie van de logaritmetabel van Napier. Zie de website [2] van de St. Andrews universiteit. Zie tevens mijn bespreking van de uitgebreide biografie van Bürgi door Staudacher, (2018), hierboven, en zie referentie [9].

### Prosthairesis

Lang voordat Napier zijn tabel met logaritmen en Bürgi zijn tabel met anti-logaritmen publiceerden, bestond het fundamentele concept van 'logaritmen' (Napier bedacht de benaming 'logaritme') al geruime tijd. Volgens Havil (2014), [4], p. 62 e.v., werden trigonometrische formules die teruggaan tot de Middeleeuwen al gebruikt in de astronomie en navigatie, waardoor het mogelijk werd om sommen en verschillen om te zetten in producten en quotiënten, en vice

$$\text{versa. Bijvoorbeeld: } \begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2} \{ \cos(x+y) + \cos(x-y) \} \\ \sin x \sin y = \frac{1}{2} \{ \cos(x-y) - \cos(x+y) \} \end{cases}$$

Dit zijn rekenkundig echter tamelijk bewerkelijke formules, zoals het volgende voorbeeld laat zien.

### Voorbeeld

We willen het product weten van 0.786 en 0.569. Dan is  $\sin x = 0.786$  en  $x = 51.813^\circ$ ;  $\sin y = 0.569$  en  $y = 34.681^\circ$ ;  $x - y = 17.132^\circ$ ;  $\cos(x - y) = 0.9556$ ; en tevens  $x + y = 86.494^\circ$ ;  $\cos(x + y) = 0.06115$ . Het product is:  $0.786 \times 0.569 = \frac{1}{2}(0.9556 - 0.06115) = 0.447$  (in drie significante cijfers).

De rekenkundige bewerkingen die moeten worden uitgevoerd zijn eenvoudiger dan vermenigvuldigen, maar dit voorbeeld laat goed zien dat je over een nauwkeurige sinustafel moet beschikken om hiermee te kunnen rekenen. Dat is vermoedelijk ook een reden dat Bürgi zijn eigen sinustabel samenstelde.



**Fig. 2: Portret van Jost Bürgi uit 1619, getekend door Ägidius Sadeler. Het frame is echter aanzienlijk ouder, getekend door Anton Eisenhoit in de jaren 1590/92. Deze figuur toont de vele toepassingen van driehoeksmetingen, verricht met instrumenten die door Bürgi zijn geconstrueerd. Zie website [3].**

### Meetkundige en rekenkundige rijen

Rond het jaar 1500 ontwikkelden de wiskundigen Michael Stiffel (1487–1567) en Nicolas Chuquet (1450? –1500?) een methode om berekeningen die vermenigvuldiging en deling omvatten om te zetten in sommen en verschillen door gebruik te maken van een voor de hand liggende verbinding tussen arithmetrische en geometrische rijen.

Enkele voorgangers van Napier en Bürgi gebruikten in het bijzonder de machten  $2^n$ , waarmee ze een verbinding maakten tussen de rekenkundige rij van exponenten (magnitudes genoemd)  $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  en de geometrische rij van de machten  $\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots$ . Zie bijvoorbeeld Donners (2002), [5], blz. 59 - 61. De geschiedenis van dit vroege logaritmische concept is uitgebreid beschreven en in detail besproken door Stephan Weiss. Zie [6]. In de 16<sup>e</sup> eeuw werd de relatie tussen de twee rijen algemener geformuleerd.

De geometrische rij:

$$\{x_n\} = a, a\rho, a\rho^2, a\rho^3, \dots$$

met verschillende initiële factoren  $a$  en verschillende gemeenschappelijke ratio's  $\rho$ , werd in verband gebracht met een rekenkundige rij:

$$\{\lambda_n\} = b, b + \delta, b + 2\delta, \dots$$

van magnitudes, of *logaritmen* zoals Napier ze noemde, met verschillende initiële termen  $b$  en verschillende gemeenschappelijke verschillen  $\delta$ . De opeenvolgende gehele waarden van de exponent  $n$  van  $\rho$  (d.w.z. de logaritmen, oftewel de magnitudes) vormen dan een rekenkundige rij. Deze verbinding werd *prosthaphairesis* genoemd. Dat opmerkelijke woord is afgeleid van de Griekse woorden prosthesis (πρόσθεσις) en aphaeresis (ἀφαίρεσις), wat duidt op de combinatie van optelling en aftrekking in één proces.

### Het moderne logaritmebegrip

Het moderne basisidee van logaritmen, dat voortkomt uit het werk van Leonard Euler (1707-1783), is uiteraard dat elk positief reëel getal  $x > 0$  kan worden uitgedrukt als een macht met een constante positieve basis (ratio)  $\rho$ , ongelijk aan 1, en met een initiële factor  $a = 1$ , dus als:

$$x = \rho^n$$

### Johannes Kepler

Jost Bürgi creëerde een logaritmetabel (in feite een anti-logaritmetabel) geïnspireerd door dat concept; zoals gezegd, hij publiceerde deze pas in 1620, na aanhoudend aandringen van Kepler, wat dus enkele jaren na de publicatie van Napier's *Descriptio* in 1614 was. Zie figuur 3. De astronoom Johannes Kepler was een gepassioneerde voorstander van het gebruik van logaritmen. Door gebruik te maken van de meer handige en nauwkeurige berekeningen die mogelijk werden gemaakt door logaritmische berekeningen – waarschijnlijk beïnvloed door Bürgi en/of Napier – deed Kepler belangrijke baanbrekende ontdekkingen in het begin van de 17<sup>e</sup> eeuw. Kepler formuleerde in 1609 zijn eerste wet van de planetenbeweging, die de elliptische banen van planeten rond de zon beschrijft. Vervolgens stelde hij zijn tweede wet vast, die stelt

dat een lijnsegment dat een planeet en de zon verbindt, gelijke gebieden over gelijke tijdsintervallen doorloopt. In 1619 introduceerde hij zijn derde wet, die de relatie beschrijft tussen de tijd die een planeet nodig heeft om de zon te omcirkelen en de afstand tot de zon. Deze derde wet bevat tweede en derde machten, wat het rekenen ermee moeizaam maakt. Het mag worden verondersteld dat hij een of ander logaritmeconcept heeft gebruikt in het enorme aantal omslachtige berekeningen. Voor meer details, zie Lombardi (2007), [7], pp. 38-39.

Het onderliggende idee is vrij eenvoudig: men kan complexe berekeningen met de oorspronkelijke positieve reële getallen  $x$  vertalen naar eenvoudigere berekeningen met de logaritmen  $n$ . Zoals algemeen bekend is, kan vermenigvuldigen worden omgevormd tot optellen, delen wordt aftrekken, en het nemen van wortels vertaalt zich naar delen door 2, 3, enzovoorts.

*Fig. 3. Titelpagina van de anti-logaritmetabel van Bürgi. Merk de prominente vermelding van het getal 23027.0022 op, dat we de constante van Bürgi noemen. Verder zien we hier een voorloper van de logaritmische rekenschijf. Het lijkt er op dat Bürgi nooit op het idee is gekomen die verder te ontwikkelen. Dan zou hij de uitvinder van de rekenschijf, en mogelijk van de rekenliniaal, zijn geweest.*



### Slechts twee exemplaren bewaard

Hoewel Bürgi's anti-logaritmetabel innovatief was, was deze naar verluidt moeilijk te interpreteren door gebruikers, wat bijdroeg aan een gebrek aan wijdverbreide populariteit. Tot op de dag van vandaag zijn er slechts twee originele exemplaren van deze tabel bewaard gebleven. Voor verdere informatie wordt verwezen naar Donners (2002), [5], p. 61 e.v. Ondanks de aanhoudende aanmoediging van Kepler en diens aanzienlijke bijdragen aan het manuscript, publiceerde Bürgi zijn tabel pas in 1620 – zes jaar na de uitgave van Napier's *Descriptio* in 1614 – en dat zonder instructies of voorbeelden. Dit leidde tot verwarring onder gebruikers over de juiste toepassing van de tabel. Gezien deze beperkingen gaf Kepler uiteindelijk de voorkeur aan Napier's logaritmetabel boven die van Bürgi.

De moderne opvatting van logaritmen is voortgekomen uit het werk van Briggs, die stelde dat de logaritme van 1 gelijk is aan 0 en dat de logaritme met basis (grondtal) 10 gelijk is aan 1. Briggs baseerde zijn ideeën op die van Napier, waardoor de weg die Bürgi had ingeslagen uiteindelijk doodlopend was.

### Bürgi's anti-logaritme in moderne wiskundige notatie

Het is opmerkelijk dat Jost Bürgi in centraal Europa, rond dezelfde tijd dat Napier in de late 16<sup>e</sup> eeuw in Schotland zijn logaritmetabellen begon te vervaardigen, een vergelijkbaar discreet model ontwikkelde voor het benaderen van anti-logarithmen. Het is zeer waarschijnlijk dat Bürgi en Napier zich niet bewust waren van elkaars bijdragen op dit gebied van de wiskunde. Voor een uitgebreide discussie over deze prioriteitskwestie zie Truemper (2024) [1], pp. 103-110.

Bürgi's model gebruikt, om met gehele getallen te kunnen werken, een initiële constante van  $a = 10^8$  voor een meetkundige rij met ratio:

$$\rho = 1 + \frac{1}{10^4}$$

Bürgi ging uit van de volgende geometrische rij, waarvan hij de termen **zwarte nummers** noemde:

$$z_n = 10^8 \left( 1 + \frac{1}{10^4} \right)^n ; n = 0, 1, 2, \dots$$

De ratio is vergelijkbaar met die van Napier's basale geometrische rij:

$$x_n = 10^7 \left( 1 - \frac{1}{10^7} \right)^n ; n = 0, 1, 2, \dots$$

maar is een grovere (discrete) indeling van reële getallen.

De geometrische rij fungeert als zijn discrete indeling voor het continuüm van positieve reële getallen. Bürgi berekende, met behulp van dezelfde soort recursie die Napier gebruikte, meer dan 23.000 termen (één decade) van deze meetkundige rij. Voor zijn **rode nummers**  $r$  (de logaritmen) definieerde hij het quotiënt:

$$\frac{r}{10} = n$$

Formule (2) kan worden herschreven als:

$$z = 10^8 \left( 1 + \frac{1}{10^4} \right)^{r/10}$$

Hieruit volgt dat zijn logaritmen (rode waarden) in moderne wiskundige notatie zijn:

$$r = 10 \left( \frac{\ln \frac{z}{10^8}}{\ln \left( 1 + \frac{1}{10^4} \right)} \right)$$

Dit is de waarde van de Bürgi-logaritme  $r$  in het rood van een zwart getal  $z$ . Zie ook Roegel (2010), [8], p. 12. De reden achter Bürgi's introductie van de quotiënt  $r/10$  blijft onduidelijk. Zie bijvoorbeeld Truemper (2024) [1], pp. 38 e.v. voor een discussie over deze keuze.

Bürgi's logaritme kan, net als die van Napier, niet worden beschouwd als een ware logaritme in de moderne zin, omdat hij niet uitsluitend de exponent van een constante basis vertegenwoordigt. De factor  $10^8$  vormt een belemmering, evenals de extra deling door 10.

### Schaling

Om de tabel van Bürgi beter te kunnen begrijpen is schaling nodig. In de eerste plaats verwijderen we de factor  $10^8$ . Dat betekent dat alle negen-cijferige zwarte, geheeltallige waarden een decimale punt krijgen met acht cijfers erachter. We verkrijgen op die manier de getallen van 1.000 000 00 tot en met 9.999 999 99, die precies één decade vullen. (Net zoals de schaal C op een rekenliniaal). Op het getal 10 komen we zo dadelijk terug.

In de tweede plaats voeren we de rode logaritme  $R$  in die  $r$  gedeeld door 10 is. We krijgen dan het volgende eenvoudige verband tussen de geschaalde zwarte getallen (hoofdletter  $Z!$ ) en de geschaalde exponenten (logarithmen, magnitudes)  $R$  (hoofdletter  $R!$ ):

$$Z = \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^R$$

De ratio:

$$\rho = \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)$$

van de meetkundige rij is zodanig gekozen dat de impliciete nauwkeurigheid van de tabel negen significante cijfers voor elke zwarte waarde mogelijk maakt. De redenering daarachter is niet zo eenvoudig, en laten we hier achterwege. Zie hoofdstuk 6 van Truemper (2024) [1]. Op het getal 10.000 000 00 (dat tien significante cijfers bevat) komen we zo dadelijk terug.

De ratio 1.0001 is zodanig gekozen dat elk volgende zwart getal eenvoudig is te berekenen. Het is de som van het voorgaande getal, plus het betreffende getal, waarbij de decimale punt vier plaatsen naar rechts is geschoven. Bijvoorbeeld  $Z = 1.585\ 765\ 72 + 0.0001585\ 765\ 72 = 1.585\ 924\ 30$ .

Bürgi (of mogelijk Kepler) realiseerde zich dat je bij berekeningen de logaritme van 10 nodig hebt. Maar, het gehele getal 10 is niet uit te drukken als:

$$10 = \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^R$$

met een geheeltallige logaritme  $R$ .

Nu is:

$$\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{23027} = 9.999\ 997\ 79$$

Pagina = 5								
	1600	1650	1700	1750	1800	1850	1900	1950
0	1.17350148	1.17938339	1.18529478	1.19123579	1.19720659	1.20320731	1.20923811	1.21529914
1	1.17361883	1.17950133	1.18541331	1.19135492	1.19732631	1.20332763	1.20935903	1.21542067
2	1.17373620	1.17961928	1.18553185	1.19147405	1.19744604	1.20344796	1.20947997	1.21554221
3	1.17385357	1.17973724	1.18565040	1.19159320	1.19756579	1.20356831	1.20960092	1.21566376
4	1.17397095	1.17985521	1.18576897	1.19171236	1.19768554	1.20368867	1.20972188	1.21578533
5	1.17408835	1.17997320	1.18588754	1.19183153	1.19780531	1.20380904	1.20984285	1.21590691
6	1.17420576	1.18009120	1.18600613	1.19195071	1.19792509	1.20392942	1.20996383	1.21602850
7	1.17432318	1.18020921	1.18612473	1.19206991	1.19804488	1.20404981	1.21008483	1.21615010
8	1.17444061	1.18032723	1.18624334	1.19218912	1.19816469	1.20417021	1.21020584	1.21627172
9	1.17455806	1.18044526	1.18636197	1.19230834	1.19828451	1.20429063	1.21032686	1.21639334
10	1.17467551	1.18056330	1.18648061	1.19242757	1.19840433	1.20441106	1.21044789	1.21651498
11	1.17479298	1.18068136	1.18659925	1.19254681	1.19852417	1.20453150	1.21056894	1.21663664
12	1.17491046	1.18079943	1.18671791	1.19266606	1.19864403	1.20465195	1.21068999	1.21675830
13	1.17502795	1.18091751	1.18683659	1.19278533	1.19876389	1.20477242	1.21081106	1.21687998
14	1.17514545	1.18103560	1.18695527	1.19290461	1.19888377	1.20489290	1.21093214	1.21700166
15	1.17526297	1.18115370	1.18707396	1.19302390	1.19900366	1.20501339	1.21105324	1.21712336
16	1.17538049	1.18127182	1.18719267	1.19314320	1.19912356	1.20513389	1.21117434	1.21724508
17	1.17549803	1.18138995	1.18731139	1.19326252	1.19924347	1.20525440	1.21129546	1.21736680
18	1.17561558	1.18150808	1.18743012	1.19338184	1.19936339	1.20537493	1.21141659	1.21748854
19	1.17573314	1.18162624	1.18754887	1.19350118	1.19948333	1.20549546	1.21153773	1.21761029
20	1.17585072	1.18174440	1.18766762	1.19362053	1.19960328	1.20561601	1.21165889	1.21773205
21	1.17596830	1.18186257	1.18778639	1.19373989	1.19972324	1.20573657	1.21178005	1.21785382
22	1.17608590	1.18198076	1.18790517	1.19385927	1.19984321	1.20585715	1.21190123	1.21797561
23	1.17620351	1.18209896	1.18802396	1.19397865	1.19996320	1.20597773	1.21202242	1.21809740
24	1.17632113	1.18221717	1.18814276	1.19409805	1.20008319	1.20609833	1.21214362	1.21821921
25	1.17643876	1.18233539	1.18826157	1.19421746	1.20020320	1.20621894	1.21226484	1.21834103
26	1.17655640	1.18245362	1.18838040	1.19433688	1.20032322	1.20633956	1.21238606	1.21846287
27	1.17667406	1.18257187	1.18849924	1.19445632	1.20044325	1.20646020	1.21250730	1.21858471
28	1.17679173	1.18269012	1.18861809	1.19457576	1.20056330	1.20658084	1.21262855	1.21870657
29	1.17690941	1.18280839	1.18873695	1.19469522	1.20068335	1.20670150	1.21274982	1.21882844
30	1.17702710	1.18292667	1.18885582	1.19481469	1.20080342	1.20682217	1.21287109	1.21895033
31	1.17714480	1.18304497	1.18897471	1.19493417	1.20092350	1.20694285	1.21299238	1.21907222
32	1.17726251	1.18316327	1.18909361	1.19505366	1.20104359	1.20706355	1.21311368	1.21919413
33	1.17738024	1.18328159	1.18921251	1.19517317	1.20116370	1.20718425	1.21323499	1.21931605
34	1.17749798	1.18339992	1.18933144	1.19529269	1.20128381	1.20730497	1.21335631	1.21943798
35	1.17761573	1.18351826	1.18945037	1.19541221	1.20140394	1.20742570	1.21347765	1.21955992
36	1.17773349	1.18363661	1.18956931	1.19553176	1.20152408	1.20754645	1.21359899	1.21968188
37	1.17785126	1.18375497	1.18968827	1.19565131	1.20164424	1.20766720	1.21372035	1.21980385
38	1.17796905	1.18387335	1.18980724	1.19577087	1.20176440	1.20778797	1.21384173	1.21992583
39	1.17808685	1.18399173	1.18992622	1.19589045	1.20188458	1.20790875	1.21396311	1.22004782
40	1.17820465	1.18411013	1.19004521	1.19601004	1.20200477	1.20802954	1.21408451	1.22016983
41	1.17832247	1.18422854	1.19016422	1.19612964	1.20212497	1.20815034	1.21420592	1.22029184
42	1.17844031	1.18434697	1.19028323	1.19624925	1.20224518	1.20827116	1.21432734	1.22041387
43	1.17855815	1.18446540	1.19040226	1.19636888	1.20236540	1.20839198	1.21444877	1.22053591
44	1.17867601	1.18458385	1.19052130	1.19648852	1.20248564	1.20851282	1.21457021	1.22065797
45	1.17879387	1.18470231	1.19064035	1.19660817	1.20260589	1.20863367	1.21469167	1.22078003
46	1.17891175	1.18482078	1.19075942	1.19672783	1.20272615	1.20875454	1.21481314	1.22090211
47	1.17902965	1.18493926	1.19087849	1.19684750	1.20284642	1.20887541	1.21493462	1.22102420
48	1.17914755	1.18505775	1.19099758	1.19696718	1.20296671	1.20899630	1.21505611	1.22114630
49	1.17926546	1.18517626	1.19111668	1.19708688	1.20308700	1.20911720	1.21517762	1.22126842
50	1.17938339	1.18529478	1.19123579	1.19720659	1.20320731	1.20923811	1.21529914	1.22139055

Fig. 4. Pagina 5/58 van de geschaalde tabel van Bürgi.

En ook:

$$\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{23028} = 10.000\,997\,80$$

Interpolatie levert de niet-gehele logaritme van 10, in negen significante cijfers: **23 027.0022**.

Dit is de *constante van Bürgi* die zo prominent (in het rood) op de titelpagina in figuur 3 wordt vermeld. Merk op, dat Bürgi de decimale punt als rondje noteert boven de eerste nul, dus het eerste cijfer achter onze decimale punt.

Hier zien we de complicaties van de keuze van een grondtal ongelijk aan de basis van het gebruikte getallenstelsel. Henri Briggs doorzag dit, en gebruikte daarom de basis 10 als het grondtal van zijn logaritme.

Overigens is het opmerkelijk om te zien hoeveel gebruik Bürgi maakte van het decimale stelsel. Dat was in die tijd nog helemaal niet gebruikelijk. Ook hij rekende nog vaak in het sexagesimale stelsel (basis 60). Er is zelfs een 60—tallige vermenigvuldigingstafel van hem bekend.

Figuur 4 toont pagina 5 van de geschaalde waarden, gegenereerd in Excel. Het boek van Bürgi bevat 58 van dergelijke tabelbladzijden (vergelijkbaar, maar met niet-geschaalde waarden). De logaritme  $R$  van een zwart getal is steeds de som van een horizontale en een verticale, in rood vermelde waarde. Zo is:

$$\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{1715} = 1.0001^{1715} = 1.187\,073\,96$$

De geschaalde Bürgi-logaritme van 1.187 073 96 is kennelijk 1 715.

### Het rekenen met de geschaalde tabellen

Het rekenen met de logaritme van Bürgi is betrekkelijk eenvoudig, zeker als we de berekening met de geschaalde waarden uitvoeren. Dat is opmerkelijk. Iedereen kan gemakkelijk begrijpen hoe de calculatie gaat. De *Progresstabulen* werden immers gepubliceerd zonder handige gebruiksaanwijzing, en ook in een politiek onrustige tijd met door religieuze spanningen gemotiveerde oorlogshandelingen.

We bespreken twee eenvoudige voorbeelden, waarbij ik de lineaire interpolaties, die voor grotere nauwkeurigheid nodig zijn, achterwege laat. Het eerste product levert een getal onder de 10; het tweede product een getal boven de 10.

#### Voorbeeld 2 x 3

Op tabelpagina 18 vinden we:

$$1.0001^{6932} = 2.000\,036\,32$$

Op pagina 28 vinden we:

$$1.0001^{10987} = 3.000\,098\,34$$

De som van de logaritmen is  $17919 = 17\,900 + 19$ .

Op pagina 45 vinden we:

$$1.0001^{17919} = 6.000\,305\,66$$

We zien dat dit resultaat niet zo nauwkeurig is. Voor nauwkeuriger berekeningen moeten we lineair interpoleren, wat toch weer een betrekkelijk lastige operatie is.

**Voorbeeld 3 x 4**

Net als bij een rekenliniaal moeten we iets speciaals doen als het product groter is dan 10. Hier moeten we de constante van Bürgi in rekening brengen.

Op tabelpagina 28 vinden we:

$$1.0001^{10987} = 3.000\ 098\ 34$$

Op pagina 35 vinden we:

$$1.0001^{13864} = 4.000\ 145\ 30$$

De som van de logaritmen is **24 851**. Dit is groter dan **23 027.0022**. Deze constante van Bürgi trekken we af van **24 851** (dat komt overeen met delen door 10, net zoals bij rekenlinialen) en vinden de logaritme **1 823.9978**. Om interpolatie te voorkomen ronden we deze voor het gemak af op **1 824**. Op pagina 5 van Bürgi's tabel vinden we:

$$1.0001^{1824} = 1.200\ 083\ 19$$

Omdat we door 10 hebben gedeeld, is de werkelijke waarde is 10 maal zo groot, dus 12.00.

**Conclusie**

Het idee achter de antilogaritmetafel van Bürgi is de koppeling van een rekenkundige rij aan een meetkundige rij met een ratio van 1,0001, die slechts weinig van 1 verschilt. Het samenstellen van de tabel is relatief eenvoudig en veel minder complex dan de constructie van de tabel van Napier. Daarentegen vergt het opzoeken van de zwarte getallen een aanzienlijke hoeveelheid tijd. Voor een acceptabele nauwkeurigheid is bovendien interpolatie noodzakelijk, wat, hoewel niet moeilijk, toch een tamelijk tijdrovende handeling is. Desondanks maakt de tabel van Bürgi het relatief eenvoudig om vermenigvuldigingen, delingen en worteltrekkingen uit te voeren. Deze tabel vereenvoudigde het werk voor wetenschappers, vooral op het gebied van astronomie en navigatie, vóór de ontwikkeling van rekenmachines en computers die deze tabellen overbodig maakten.

In tegenstelling tot latere logaritmetabellen zijn de logaritmen van Bürgi minder bekend, maar ze vormen een belangrijke stap in de geschiedenis van wiskundige en astronomische berekeningen. De bijdragen van Bürgi aan de wiskunde worden vaak ondergewaardeerd, maar zijn werk legde mede de basis voor verder onderzoek en ontwikkelingen in zowel de praktijk van, als de theorie over logaritmische grootheden. Zie Truemper (2024) [1], pp. 90 e.v.

**REFERENTIES**

- [1] Truemper, K., *Die wagemutige Erfindung der Logarithmentafeln: Wie Jost Bürgi, John Napier und Henry Briggs das Rechnen revolutionierten*, Leibniz Company, 2024.
- [2] <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Burgi/>
- [3] Portret van Bürgi: <https://cacm.acm.org/blogcacm/jost-brgi-and-the-discovery-of-logarithms/>
- [4] Havil, J., *John Napier, Life, Logarithms and Legacy*, Princeton University Press, 2014.
- [5] Donners, J.H., *Mijnheer van Dalen krijgt antwoord*, private publicatie, 2002.
- [6] Weiss, Stephan, *Die proportionale Definition des Logarithmus*, Weiss-DefLogsProp-dt.pdf

(me-chrech.info).

[7] Lombardi, A.M., Kepler, *Astronomer in search of harmony*, deel 20 van de serie Scientific Biographies of Natural Science and Technology, Veen Magazines, Amsterdam, 2007.

[8] Roegel, D., *Bürgi's Progress Tabulen (1620): Logarithmic Tables without logarithms*. [Research Report], 2010, inria-00543936.

[9] Staudacher, F., *Jost Bürgi, Kepler und der Kaiser*, NZZ Libro Neuze Züriger Zeitung AG, Zurich, 2018.